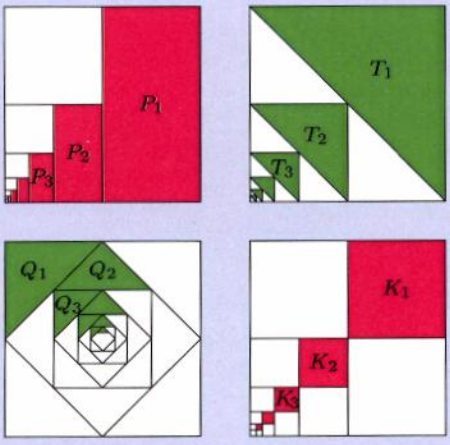
Adam Płocki

Matematyka ogólna 1

elementy logiki, teorii mnogości, analizy matematycznej i stochastyki



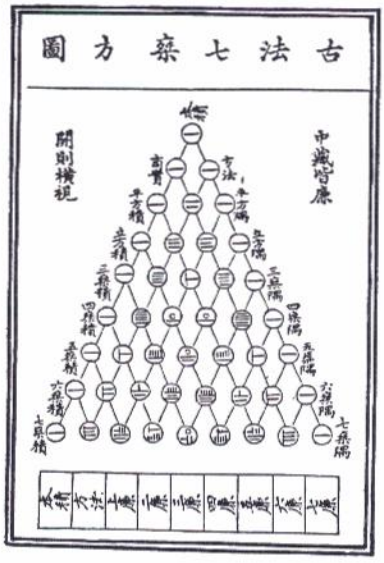
Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa
Nowy Sącz 2009

Adam Płocki

MATEMATYKA OGÓLNA 1

elementy logiki, teorii mnogości analizy matematycznej i stochastyki

Wydanie III zmienione



Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa
w Nowym Sączu

Nowy Sącz 2009

Komitet Redakcyjny
Zdzisława Zacłona – przewodnicząca, Jarosław Frączek, Ryszard Gajdosz, Wojciech Kudyba, Monika Madej-Cetnarowska, Leszek Rudnicki

Redaktor Naczelny
doc. dr Zdzisława Zacłona

Sekretarz Redakcji
Katarzyna Górowska

Recenzent
dr hab. prof. nadzw. Henryk Kąkol

Skład komputerowy i opracowanie graficzne
Adam Płocki

Wydanie III zmienione

Wydano za zgodą JM Rektora PWSZ w Nowym Sączu,
prof. dra hab. inż. Zbigniewa Ślipka

Autor ponosi odpowiedzialność za poprawność językową tekstu

© Copyright by Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Nowym Sączu

Nowy Sącz 2009

ISBN 978-83-0822-79-1

Adres Redakcji
Nowy Sącz 33-300, ul. Staszica 1
tel. 0184434545, e-mail: briw@pwsz-ns.edu.pl

Wydawca
Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Nowym Sączu
ul. Staszica 1, 33-300 Nowy Sącz
tel. 0184434545, e-mail: briw@pwsz-ns.edu.pl

Współwydawca

NOVA SANDEC, ul. Lwowska 143
tel. 0185474545, e-mail: biuro@novasandec.pl

Spis treści

1. Rachunek zdań – rachunek funkcyjny 9
   - 1.1. Zdanie 9
   - 1.2. Funktory zdaniotwórcze 9
   - 1.3. Tautologie 11
   - 1.4. Funkcja zdaniowa 12
   - 1.5. Kwantyfikatory 13
   - 1.6. Prawa działań na kwantyfikatorach 14
   - 1.7. Reguły dowodzenia 15
   - 1.8. Zamknięty układ implikacji – kwadrat logiczny 17
2. Algebra zbiorów 19
   - 2.1. Zbiór jako pojęcie matematyczne 19
   - 2.2. Inkluzja – diagramy Venna 21
   - 2.3. Przedziały liczbowe jako szczególne zbiory 22
   - 2.4. Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej 23
   - 2.5. Suma, iloczyn i różnica zbiorów 23
   - 2.6. Zbiory liczbowe ograniczone 26
   - 2.7. Rodzina wszystkich podzbiorów zbioru 27
   - 2.8. Iloczyn kartezjański zbiorów 28
3. Relacje 31
   - 3.1. Relacja ze zbioru w zbiór – relacja w zbiorze 31
   - 3.2. Graf relacji i tabela jako forma prezentacji relacji 33
   - 3.3. Relacja równoważnościowa 35
   - 3.4. Relacja równoważnościowa a definiowanie pojęć 37
4. Funkcja 39
   - 4.1. Funkcja jako szczególna relacja 39
   - 4.2. Funkcja jako przyporządkowanie 40
   - 4.3. Niektóre funkcje w matematyce i fizyce 42
   - 4.4. Funkcja charakterystyczna zbioru 43
   - 4.5. Injekcja, surjekcja, bijekcja 44
   - 4.6. Równoliczność zbiorów. Moc zbioru 46
   - 4.7. Złożenie funkcji, czyli funkcja złożona. Funkcja odwrotna 49
   - 4.8. Funkcje liczbowo-liczbowe 50

4.9. Suma, różnica, iloczyn i iloraz funkcji liczbowo-liczbowych 51
4.10. Wykres funkcji liczbowo-liczbowej 52
4.11. Monotoniczne funkcje liczbowo-liczbowe 55
4.12. Funkcje liczbowo-liczbowe ograniczone 57
4.13. Funkcje liczbowo-liczbowe parzyste i funkcje nieparzyste 58
4.14. Funkcje liczbowo-liczbowe okresowe 61
4.15. Zadania różne 62
5. Funkcje elementarne, równania i nierówności 65
5.1. Funkcje elementarne 65
5.2. Funkcja liniowa 65
5.3. Równanie liniowe 66
5.4. Macierze, macierze jednostkowe 67
5.5. Operacje elementarne na macierzach 68
5.6. Macierze nieosobliwe 68
5.7. Wyznacznik macierzy stopnia 2 69
5.8. Układy równań liniowych na płaszczyźnie kartezjańskiej 70
5.9. Układ równań liniowych i jego macierzowa prezentacja . 73
5.10. Metoda eliminacji Gaussa 74
5.11. Funkcja kwadratowa.
Równania i nierówności kwadratowe 78
5.12. Wielomiany 80
5.13. Równania algebraiczne 81
5.14. Funkcja wymierna 82
5.15. Równania i nierówności wymierne 84
5.16. Funkcja potęgowa 84
5.17. Funkcja wykładnicza 85
5.18. Funkcja logarytmiczna 85
5.19. Funkcje trygonometryczne 87
5.20. Funkcje cyklometryczne 88
6. Ciągi nieskończone jako szczególne funkcje 91
6.1. Definicja ciągu 91
6.2. Podciąg ciągu 94
6.3. Ciągi liczbowe 95
6.4. Ciąg Fibonacciego 99
6.5. Wykres ciągu liczbowego 102
6.6. Ciągi liczbowe monotoniczne 103
6.7. Ciągi liczbowe ograniczone 105
6.8. Definicja granicy ciągu – zbieżność w sensie węższym . . 106
6.9. Twierdzenia o ciągach zbieżnych w sensie węższym . . . 107
6.10. Granice niewłaściwe – zbieżność w sensie szerszym . . . 113
6.11. Symbole nieoznaczone 115
7. Szeregi liczbowe 117

7.1. Definicja szeregu 117
7.2. Twierdzenia o zbieżności szeregów 119
7.3. Szeregi geometryczne 122
7.4. Szeregi liczbowe a pola 124
8. Kombinatoryka 127
8.1. Doświadczenie losowe oraz zbiór jego wyników 127
8.2. Toto-lotek i gra losowa typu Toto Lotka 130
8.3. Permutacja 132
8.4. Wariacja bez powtórzeń 134
8.5. Wariacja 137
8.6. Kombinacja 140
8.7. Deska Galtona 144
8.8. Dwumian Newtona 146
8.9. Różne zadania z kombinatoryki 147
9. Rachunek prawdopodobieństwa 151
9.1. Przestrzeń probabilistyczna 151
9.2. Model probabilistyczny doświadczenia losowego 152
9.3. Metoda jednakowo możliwych przypadków 155
9.4. Drzewo stochastyczne 157
9.5. Zdarzenie w przestrzeni probabilistycznej 160
9.6. Prawdopodobieństwo zdarzenia 164
9.7. Prawdopodobieństwo klasyczne 169
9.8. Prawdopodobieństwo jako ocena szansy i ryzyka 174
9.9. Loteria fantowa przynosi zyski 179
9.10. Zmienna losowa i jej rozkład 180
9.11. Czas trwania doświadczenia o losowej liczbie etapów . . 182
9.12. Fizyczna interpretacja rozkładu zmiennej losowej 183
9.13. Zmienna losowa wokół nas 186
9.14. Suma i iloczyn zmiennych losowych 187
9.15. Zmienna losowa i nowa przestrzeń probabilistyczna . . . 188
9.16. Wartość oczekiwana zmiennej losowej 190
9.17. Nadzieja matematyczna w interpretacji fizycznej rozkładu 190
9.18. Wartość oczekiwana a prosperowanie hazardu 191
9.19. Własności wartości oczekiwanej 193
10. Granica funkcji w punkcie i ciągłość funkcji 195
10.1. Punkt skupienia zbioru 195
10.2. Granica funkcji w punkcie 197
10.3. Granice jednostronne funkcji w punkcie 201
10.4. Granice niewłaściwe funkcji w punkcie 204
10.5. Niewłaściwe granice jednostronne funkcji w punkcie . . 206
10.6. Granice funkcji w nieskończoności 207
10.7. Granice niektórych funkcji 209

10.8. Wspólna postać definicji granicy funkcji w punkcie . . . 210
10.9. Asymptoty funkcji liczbowo-liczbowej 210
10.10. Funkcja ciągła w punkcie 212
11. Rachunek różniczkowy 221
11.1. Pochodna funkcji w punkcie 221
11.2. Geometryczna i fizyczna interpretacja pochodnej 222
11.3. Różniczkowalność funkcji w punkcie a jej ciągłość w tym punkcie 224
11.4. Pochodna jako nowa funkcja – twierdzenia o pochodnej 224
11.5. Reguły de L'Hospitala 228
11.6. Ekstrema lokalne funkcji 229
11.7. Twierdzenia o wartości średniej 230
11.8. Pochodne wyższych rzędów 233
11.9. Funkcja wklęsła. Funkcja wypukła 235
11.10. Punkty przegięcia wykresu funkcji 237
11.11. Badanie przebiegu zmienności funkcji 239
12. Rachunek całkowy 241
12.1. Całka nieoznaczona i jej własności 241
12.2. Całkowanie przez części 243
12.3. Całkowanie przez podstawianie 244
12.4. Całka oznaczona 244
12.5. Całka a objętość i pole powierzchni brył obrotowych . . 248
13. Liczby zespolone 251
13.1. Zbiór liczb zespolonych i działania w tym zbiorze 251
13.2. Moduł i argument liczby zespolonej 254
13.3. Trygonometryczna postać liczby zespolonej 256
13.4. Pierwiastki z liczby zespolonej 257
13.5. Równanie kwadratowe w zbiorze liczb zespolonych . . . 258
14. Uzupełnienia 259
14.1. Funkcje wielu zmiennych 259
14.2. Równania różniczkowe zwyczajne 262
14.3. Przetrzenie probabilistyczne w przyrodzie – genotyp potomka jako wynik doświadczenia losowego 266
14.4. Prawdopodobieństwo a pewne prawa przyrody – prawo Hardy'ego-Weinberga 268
15. Odpowiedzi i wskazówki do zadań 271
Literatura 279
Skorowidz 281

Wstęp

Matematyka rozumiana jest dwojako: albo jako specyficzna intelektualna działalność, albo jako rezultat tej działalności, a więc jako gotowy produkt. W pierwszym znaczeniu mówimy o aktywności albo o twórczości matematycznej, o odkrywanie pojęć i twierdzeń matematyki. W drugim znaczeniu matematyka jest reprodukowaniem gotowych treści, w pierwszym jest produkowaniem tych treści.

Przedstawione w tej książce ujęcie wybranych działów matematyki adresowane jest do studentów sekcji nauczycielskiej wyższych szkół zawodowych, a zwłaszcza do studentów na kierunku przyroda z matematyką w tych szkołach. Jest to ujęcie wyraźnie ukierunkowane na kształcenie przyszłego nauczyciela. Z tych, między innymi, powodów jest to prezentacja matematyki ogólnej, która:

- poszerza i porządkuje wiedzę z matematyki wyniesioną ze szkoły,
- ukazuje zarazem co jest istotą matematyki, jaka jest natura jej pojęć i jej wnioskowań, czym są rachunki a czym jest matematyka,
- dostarcza różnych środków matematycznej argumentacji (oprócz rachunków i dedukcji takimi środkami są: rysunek, symetrie, analogie, pewne równoważności),
- pokazuje komu, w jakiej sytuacji i do czego mogą być potrzebne niektóre pojęcia i twierdzenia matematyki, kto, w jakiej sytuacji i z jakiego powodu mógł sformułować to lub inne matematyczne zadanie (chodzi tu o motywacje),
- uświadamia różnice między światem realnym a światem matematycznej abstrakcji.

Mowa tu więc nie tylko o działalności „wewnątrz świata matematyki" (*faza dedukcji i rachunków*), ale także o:

— przejściach od świata realnego do świata matematyki (*faza matematyzacji*, tj. faza tworzenia matematycznych schematów i modeli realnych sytuacji, faza formułowania matematycznych zadań na tle pozamatematycznych problemów) i

— o przejściach ze świata matematyki do rzeczywistości (*faza interpretacji*, faza formułowania wiarygodnych wniosków, jakie na temat rzeczywistości wynikają z rozwiązania matematycznego zadania).

Wiele fragmentów tej książki ukazuje jak organizować te trzy fazy procesu stosowania matematyki, a zwłaszcza, jak tworzyć matematyczne modele sytuacji pozamatematycznych oraz jak wyprowadzać wnioski wynikające dla praktyki z rachunków i dedukcji.

Takie dziedziny matematyki jak kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa przedstawiono w tej książce jako matematykę, której pojęcia, twierdzenia i metody można odkrywać samemu w trakcie rozwiązywania problemów (i to na ogół pozamatematycznych). Fuzję elementów kombinatoryki, rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej nazywa się *stochastyką*. Pojęcia stochastyczne (ale także specyficzne metody wnioskowań) zaprezentowano w tej pracy jako specyficzne narzędzia rozwiązywania konkretnych problemów związanych:

- z oceną ryzyka i decyzjami wynikającymi z jego wielkości,
- z oceną oczekiwanych zysków w hazardzie,
- z organizacją szkolnej loterii fantowej gwarantującej zyski jej organizatorom,
- z rozstrzyganiem, czy ocena pozytywna za wynik testowego sprawdzianu wiedzy jest wiarygodna,
- z wyjaśnianiem pewnych zaskakujących faktów empirycznych, w tym pewnych praw przyrody,
- z wyłanianiem racjonalnych decyzji itd.

Celem tej prezentacji stochastyki było ukazanie co się matematyzuje, jak się to robi i dlaczego. Praca prezentuje stochastykę jako *matematykę in statu nascendi* czyli matematykę w stadium tworzenia.

W przedstawionym tu ujęciu matematyki podkreślany jest związek między pojęciami i metodami różnych działów matematyki. Mowa tu o *idei fuzjonizmu*, o *zasadzie integracji wewnętrznej* (funkcja i zbiór jako pojęcia *wszędzie obecne* w matematyce). Wiele fragmentów tego ujęcia matematyki ujawnia także *idee integracji zewnętrznej*. Chodzi o ekspansję pojęć oraz metod matematycznych na takie dziedziny wiedzy, jak fizyka, biologia (probabilistyczne modele w genetyce), teoria podejmowania decyzji, teoria gier itd.

Ta książka jest prezentacją wybranych fragmentów matematyki oraz rozmaitych środków organizacji matematycznej twórczości.

Często nazwa gry jest identyczna jak nazwa rekwizytu (przyrządu losującego) w tej grze (*ruleta, jednoręki bandyta, koło fortuny*). Te nazwy odróżniamy czcionką. Zapis RULETA oznacza grę, w której rekwizytem jest ruleta. Podobnie zapisujemy nazwy pasjansów.

Od znaku ■ rozpoczyna się opis przykładu.
Znak □ rozpoczyna rozwiązanie zadania.

Na stronie tytułowej: *Trójkąt arytmetyczny*, zwany też *trójkątem Pascala* (grafika Zhu Shi-Jie, Chiny, ok. 1303 r.)

Nowy Sącz, w listopadzie 2009 r.

1. Rachunek zdań – rachunek funkcyjny

1.1. Zdanie

Definicja 1-1 *Zdaniem* nazywamy w logice każde stwierdzenie, o którym możemy orzekać, czy jest ono prawdziwe, czy też fałszywe.

Każdemu zdaniu przypisujemy jego wartość logiczną; zdaniu prawdziwemu – wartość 1, zdaniu fałszywemu – wartość 0. Zdania oznaczamy w logice literami: $a, b, p, q, r, \ldots$, wartość logiczną zdania a oznaczamy przez $v(a)$. Zapis $v(a) = 1$ oznacza, że zdanie a jest prawdziwe. Zapis $v(a) = 0$ oznacza, że zdanie a jest fałszywe.

■ Zdaniem jest zatem stwierdzenie: *„13 jest liczbą pierwszą"*. Stwierdzenie: *„13 jest liczbą pechową"* nie jest zdaniem. Zdaniami są stwierdzenia: $\pi - 3,14 = 0$, $sin\pi = 0$.

1.1. Które z poniższych sformułowań (stwierdzeń) są zdaniami w sensie logicznym?

1) *Czy masz dziś dobry humor?*
2) *Funkcja f jest malejąca.*
3) *Suma liczb 2 i 5 jest równa 17.*
4) *Jutro będzie deszcz.*
5) *Co też on miał na myśli?*
6) $x^2 + x^3 > 0$.
7) *W rzucie kostką wypadnie szóstka.*
8) *Zapałki służą do losowania.*

1.2. Funktory zdaniotwórcze

Ze zdań prostych tworzymy nowe zdania (zdania złożone) za pomocą *funktorów zdaniotwórczych* opisanych w poniższej tabeli.

$\sim$	*funktor negacji*	$\sim a$ *(nieprawda, że jest a)*
$\vee$	*funktor alternatywy (sumy logicznej zdań)*	$p \vee q$ *(p lub q)*
$\wedge$	*funktor koniunkcji (iloczynu logicznego zdań)*	$p \wedge q$ *(p i q)*
$\Longrightarrow$	*funktor implikacji (wynikania)*	$p \Longrightarrow q$ *(jeżeli p, to q, z p wynika q)*
$\Longleftrightarrow$	*funktor ekwiwalencji (równoważności)*	*p wtedy i tylko wtedy, gdy q, p równoważne z q*

W implikacji $p \Longrightarrow q$ zdanie p nazywamy *poprzednikiem*, a zdanie q – *następnikiem*. Jeśli implikacja $p \Longrightarrow q$ jest zdaniem prawdziwym, to mówimy, że zdanie p jest *warunkiem wystarczającym* dla zdania q, a zdanie q jest *warunkiem koniecznym* dla zdania p. Jeśli koniunkcja $(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)$ jest zdaniem prawdziwym, to mówimy, że zdanie p jest *warunkiem koniecznym i wystarczającym* dla zdania q.

Z punktu widzenia logiki matematycznej interesuje nas nie treść zdań, lecz ich wartość logiczna. Poniższa tabela prezentuje wartości logiczne zdań złożonych (a więc zdań tworzonych za pomocą funktorów zdaniotwórczych) w zależności od wartości logicznej zdań prostych.

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Longrightarrow q$	$p \Longleftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Zauważmy, że implikacja jest fałszywa wtedy i tylko wtedy, gdy jej poprzednik jest prawdziwy a następnik fałszywy.

Za pomocą zdań, funktorów zdaniotwórczych i nawiasów (które określają kolejność działania funktorów) tworzymy zdania złożone, zwane w logice *schematami zdaniowymi* albo *formułami zdaniowymi*. Są to wyrażenia rachunku zdań.

Schematami (formułami) zdaniowymi są np. następujące wyrażenia:

$$\sim (p \wedge q),\ [\sim (p \Longrightarrow q)] \Longrightarrow [\sim (p \vee q)],\ (p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow \{\sim [p \wedge (\sim q)]\}.$$

Wartość logiczną schematów zdaniowych, o których mowa w ostatniej tabeli, wyraża się następująco:

$v(\sim p) = 1 - v(p)$
$v(p \vee q) = max\{v(p), v(q)\}$
$v(p \wedge q) = min\{v(p), v(q)\}$
$v(p \Longrightarrow q) = min\{1, 1 + v(q) - v(p)\}$

Wartości logiczne schematów zdaniowych w zależności od wartości logicznych zdań prostych znajdujemy wypełniając tzw. *matrycę logiczną* zdania złożonego (tj. schematu zdaniowego).

■ Oto matryca logiczna zdania złożonego $(p \wedge q) \vee [\sim (p \Longrightarrow q)]$.

p	q	$p \wedge q$	$p \Longrightarrow q$	$\sim (p \Longrightarrow q)$	$(p \wedge q) \vee [\sim (p \Longrightarrow q)]$
0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1
1	1	1	1	0	1

Alternatywą dwu zdań p i q jest zdanie $p \vee q$, ich koniunkcją jest zdanie $p \wedge q$.

1.2. W j. polskim (w zależności od kontekstu) zdanie „*p lub q*" uznaje się za prawdziwe w trzech następujących znaczeniach:
a) gdy „prawdziwe jest co najmniej jedno z tych zdań" (alternatywa),
b) gdy „prawdziwe jest co najwyżej jedno z tych zdań" (dysjunkcja),
c) gdy „prawdziwe jest dokładnie jedno z tych zdań" (alternatywa rozłączna).
Określ matryce logiczną (tj. tabele wartości logicznych) alternatywy, dysjunkcji oraz alternatywy rozłącznej w przypadku dwu zdań p i q.

1.3. Wykaż, że jeżeli zdanie p jest fałszywe, to dla każdego zdania q poniższe formuły (zdania złożone) są prawdziwe: a) $(p \vee q) \Longleftrightarrow q$, b) $(p \wedge q) \Longleftrightarrow p$.

1.4. Wykaż, że jeżeli zdanie p jest prawdziwe, to dla każdego zdania q poniższe formuły (zdania złożone) są prawdziwe: a) $(p \wedge q) \Longleftrightarrow q$, b) $(p \vee q) \Longleftrightarrow p$.

1.5. Udowodnij, że jeżeli formuła $(\sim p) \Longrightarrow [q \wedge (\sim q)]$ jest prawdziwa, to zdanie p jest prawdziwe.

1.6. Załóżmy, że implikacja $p \Longrightarrow q$ jest zdaniem prawdziwym. Nazywamy ją *implikacją prostą*. Która z poniższych implikacji jest także wówczas zdaniem prawdziwym?
a) $q \Longrightarrow p$ (*implikacja odwrotna*),
b) $(\sim q) \Longrightarrow (\sim p)$ (*implikacja przeciwstawna*, czyli *kontrapozycja*),
c) $(\sim p) \Longrightarrow (\sim q)$ (*implikacja przeciwna*).

1.3. Tautologie

Na uwagę zasługują takie schematy zdaniowe, które są zdaniem prawdziwym niezależnie od tego, czy w miejsce zdań prostych podstawimy zdanie prawdziwe, czy fałszywe. Takim schematem zdaniowym jest na przykład alternatywa $p \vee (\sim p)$.

Definicja 1-2 Schemat zdaniowy prawdziwy dla każdej wartości logicznej zdań, z których ten schemat jest utworzony, nazywamy *tautologią*.

■ Klasyczną tautologią jest zdanie złożone $p \Longrightarrow p$. Matryca logiczna tego zdania jest następująca:

p	$p \Longrightarrow p$
0	1
1	1

.

Oto kilka ważniejszych tautologii:

1.	$\sim (\sim p) \Longleftrightarrow p$	*prawo podwójnego przeczenia*
2.	$\sim (p \wedge (\sim p))$	*prawo sprzeczności*
3.	$p \vee \sim p$	*prawo wyłączonego środka*
4.	$[p \Longrightarrow q] \Longleftrightarrow [(\sim q) \Longrightarrow (\sim p)]$	*prawo kontrapozycji*
5.	$[(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow r)] \Longrightarrow (p \Longrightarrow r)$	*prawo przechodniości implikacji*
6.	$[\sim (p \Longrightarrow q)] \Longleftrightarrow [p \wedge (\sim q)]$	*prawo zaprzeczania implikacji*
7.	$[\sim (p \vee q)] \Longleftrightarrow [(\sim p) \wedge (\sim q)]$	*prawo zaprzeczania alternatywy*
8.	$[\sim (p \wedge q)] \Longleftrightarrow [(\sim p) \vee (\sim q)]$	*prawo zaprzeczania koniunkcji*
9.	$[(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)] \Longleftrightarrow (p \Longleftrightarrow q)]$	*prawo równoważności*

Prawa 7. i 8. nazywamy *prawami de Morgana.*

Poniższe tautologie ukazują analogie między własnościami funktorów zdaniotwórczych a własnościami działań arytmetycznych.

10.	$(p \vee q) \Longleftrightarrow (q \vee p)$	*prawo przemienności alternatywy*
11.	$(p \wedge q) \Longleftrightarrow (q \wedge p)$	*prawo przemienności koniunkcji*
12.	$[p \vee (q \wedge r)] \Longleftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$	*prawo rozdzielności alternatywy względem koniunkcji*
13.	$[p \wedge (q \vee r)] \Longleftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$	*prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy*
14.	$[p \vee (q \vee r)] \Longleftrightarrow [(p \vee q) \vee r]$	*prawo łączności alternatywy*
15.	$[p \wedge (q \wedge r)] \Longleftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r]$	*prawo łączności koniunkcji*

1.7. Wykaż, że jeśli w tautologii $p \vee (\sim p)$ wstawimy za p zdanie $s \wedge q \Longrightarrow r$, to zdanie (formuła zdaniowa) $(s \wedge q \Longrightarrow r) \vee \sim (s \wedge q \Longrightarrow r)$ jest także tautologią.

1.8. Rozstrzygnij, które z poniższych zdań złożonych (formuł zdaniowych) są tautologiami:

1) $p \Longrightarrow [(\sim p) \vee p]$,
2) $[p \Longrightarrow (\sim p)] \Longrightarrow (\sim p)$,
3) $p \Longrightarrow [q \Longrightarrow (p \wedge q)]$,
4) $\sim [p \wedge (\sim p \wedge q)]$,
5) $p \Longrightarrow [(\sim q \wedge q) \Longrightarrow r]$,
6) $[(p \vee q) \wedge (p \Longrightarrow q)] \Longrightarrow (p \Longrightarrow q)$,
7) $(p \Longrightarrow q) \Longrightarrow (q \vee r)$,
8) $[(p \Longrightarrow q) \wedge (\sim q)] \Longrightarrow (\sim p)$,
9) $\{(p \vee q) \Longrightarrow [p \vee (\sim q)]\} \Longrightarrow [(\sim p) \vee q]$,
10) $(p \Longrightarrow q) \Longrightarrow [(p \wedge q) \Longrightarrow q]$,
11) $(p \Longrightarrow q) \Longrightarrow [p \Longrightarrow (q \vee r)]$,
12) $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow [(p \wedge q) \Longleftrightarrow p]$,
13) $[(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)] \Longrightarrow (p \vee q)$.

1.9. Korzystając z praw rachunku zdań udowodnij, że są tautologiami następujące zdania złożone (formuły zdaniowe):
1) $[(p \Longrightarrow q) \Longrightarrow q] \Longrightarrow (p \vee q)$,
2) $(p \Longrightarrow q) \Longrightarrow [(p \vee r) \Longrightarrow (q \vee r)]$,
3) $\{[p \wedge (\sim r)] \Longrightarrow (\sim q)\} \Longrightarrow [(p \wedge q) \Longrightarrow r]$,
4) $\{(p \vee q) \wedge [p \vee (\sim q)]\} \Longrightarrow p$,
5) $(p \Longrightarrow q) \vee (q \Longrightarrow p)$.

Definicja 1-3 [ZDANIE SPRZECZNE] Zdanie złożone, które jest zawsze fałszywe, nazywamy *zdaniem sprzecznym.*

Formuła zdaniowa α jest zdaniem fałszywym wtedy i tylko wtedy, gdy zdanie $\sim \alpha$ jest tautologią.

■ Klasycznym zdaniem sprzecznym jest formuła zdaniowa $p \wedge (\sim p)$. Jej matryca logiczna jest następująca:

p	$\sim p$	$p \wedge (\sim p)$
0	1	0
1	0	0

.

1.4. Funkcja zdaniowa

Definicja 1-4 *Funkcją zdaniową* nazywamy wyrażenie zawierające zmienne i które staje się zdaniem, gdy w miejsce tych zmiennych podstawimy symbole elementów ze zbioru U, zwanego *zakresem*, albo *dziedziną* tej funkcji zdaniowej.

Funkcję zdaniową jednej zmiennej oznaczamy przez $\varphi(x)$, funkcję zdaniową dwu zmiennych przez $\varphi(x, y)$. Przez $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ oznaczamy funkcję zdaniową n zmiennych.

■ Wyrażenia: *„miasto x leży nad Wisłą"*, *„miasto x leży nad rzeką y"*, *„liczba k jest dzielnikiem n"*, *„suma cyfr liczby n jest podzielna przez 3"* nie są zdaniami w sensie logicznym. Stają się nimi dopiero, gdy za x w wyrażeniu pierwszym, bądź za x i y w wyrażeniu drugim podstawimy nazwy konkretnych obiektów (za x – nazwę miasta, za y zaś nazwę rzeki). Oba te wyrażenia są funkcjami zdaniowymi. Pierwsze jest funkcją zdaniową jednej zmiennej, drugie – funkcją zdaniową dwóch zmiennych. Dziedziną pierwszej funkcji zdaniowej jest zbiór nazw polskich miast, dziedziną drugiej – zbiór par, z których pierwsza jest nazwą miasta, druga zaś nazwą rzeki.

■ Funkcją zdaniową jednej zmiennej jest nierówność $x^2 - 3x + 2 > 0$, równanie $x^2 + y^2 = 9$ jest funkcją zdaniową dwóch zmiennych.

Niech zbiór U będzie dziedziną funkcji zdaniowej $\varphi(x)$. Mówimy, że element a zbioru U *spełnia funkcję zdaniową* $\varphi(x)$, jeśli zdanie $\varphi(a)$ jest prawdziwe.

■ Liczba 3 spełnia funkcję zdaniową $x^2 - 3x + 2 > 0$, nie spełnia jej liczba $\frac{3}{2}$.

Zapis $\{x \in U : \varphi(x)\}$ oznacza zbiór wszystkich elementów z dziedziny funkcji zdaniowej $\varphi(x)$, spełniających tę funkcję zdaniową.

Jeśli funkcja zdaniowa $\varphi(x)$ jest równaniem z jedną niewiadomą, to każdą liczbę x_0 (z dziedziny tego równania) spełniającą tę funkcję zdaniową (a więc liczbę x_0, dla której $\varphi(x_0)$ jest zdaniem prawdziwym), nazywamy *pierwiastkiem równania* $\varphi(x)$.

Zbiór wszystkich pierwiastków równania $\varphi(x)$, a więc zbiór $\{x \in U : \varphi(x)\}$, nazywamy *rozwiązaniem równania* $\varphi(x)$.

Funkcją zdaniową jednej zmiennej jest każda nierówność z jedną niewiadomą. Analogicznie, jak w przypadku równania, określamy pierwiastek i rozwiązanie takiej nierówności.

Rozwiązać równanie (nierówność) z jedną niewiadomą oznacza zatem znaleźć jego (jej) rozwiązanie, czyli zbiór wszystkich pierwiastków tego równania (tej nierówności).

1.10. Dla każdej z poniższych funkcji zdaniowych wyznacz jej dziedzinę oraz zbiór elementów spełniających tę funkcję zdaniową:

a) $2x^3+x^2-9=0$, b) $|x-2|=|x-3|$, c) $x^2+2x-35>0$, d) $\frac{x^2-2x+1}{x-1}<0$.

W zadaniu chodzi o rozwiązanie dwóch równań i dwóch nierówności z jedną niewiadomą.

1.11. Określ na płaszczyźnie zbiór punktów, których współrzędne spełniają następujące funkcje zdaniowe dwu zmiennych:

a) $|x|=|y|$, b) $x^2+y^2<4$, c) $x\cdot y>1$, d) $x>|y|$.

W definicji pojęcia, jeśli formułujemy ją w języku symbolicznym (tj. z użyciem funktorów zdaniotwórczych, funkcji zdaniowych i kwantyfikatorów), zamiast zwrotu *„ z definicji"* używamy symbolu $:=$.

1.5. Kwantyfikatory

Załóżmy, że zbiór U jest dziedziną funkcji zdaniowej $\varphi(x)$ jednej zmiennej x. Wstawiając w miejsce x element z dziedziny U dostajemy zdanie. Ale zdanie dostajemy także, gdy funkcję zdaniową $\varphi(x)$ poprzedzimy zwrotem *„ istnieje x, że"* albo *„dla każdego x"*.

Wypowiedź: *„istnieje takie x, że $\varphi(x)$"*, czyli wypowiedź *„istnieje takie x, że $\varphi(x)$ jest zdaniem prawdziwym"*, zapisujemy w postaci: $\exists x : \varphi(x)$.

Wypowiedź: *„istnieje dokładnie jedno takie x, że $\varphi(x)$ jest zdaniem prawdziwym"* zapisujemy w postaci: $\exists! x : \varphi(x)$.

Wypowiedź: *„dla każdego x zachodzi $\varphi(x)$*, czyli wypowiedź: *„dla każdego x $\varphi(x)$ jest zdaniem prawdziwym"*, zapisujemy w postaci: $\forall x : \varphi(x)$.

Symbol $\forall$ nazywamy *kwantyfikatorem ogólnym*, albo *dużym*. Symbole $\exists$ i $\exists!$ nazywamy *kwantyfikatorami szczegółowymi (małymi)*.

Jeśli $\varphi(x)$ jest funkcją zdaniową jednej zmiennej, to wrażenia $\exists x : \varphi(x)$ oraz $\forall x : \varphi(x)$ są zdaniami.

Niech $\psi(x)$ i $\varphi(x)$ będą funkcjami zdaniowymi, których dziedziną jest zbiór U. Zapis $\exists \psi(x) : \varphi(x)$ czytamy: *istnieje takie x spełniające warunek $\psi(x)$, że zachodzi $\varphi(x)$*. Ten zapis jest równoważny z zapisem:

$$\exists x : [\psi(x) \wedge \varphi(x)].$$

Zapis $\forall \psi(x) : \varphi(x)$ czytamy: *dla każdego x spełniającego warunek $\psi(x)$, zachodzi $\varphi(x)$*. Ten zapis jest równoważny z zapisem:

$$\forall x : [\psi(x) \Longrightarrow \varphi(x)].$$

Niech $\varphi(x,y)$ będzie funkcją zdaniową dwu zmiennych. Oto różne sposoby użycia dwu kwantyfikatorów, dzięki którym z funkcji zdaniowej dwu zmiennych dostajemy zdanie:

1.	$\exists x\ \exists y : \varphi(x,y)$	istnieje takie x i istnieje takie y, że $\varphi(x,y)$
2.	$\exists x\ \forall y : \varphi(x,y)$	istnieje takie x, że dla każdego y zachodzi $\varphi(x,y)$
3.	$\forall x\ \exists y : \varphi(x,y)$	dla każdego x istnieje takie y, że $\varphi(x,y)$
4.	$\forall x\ \forall y : \varphi(x,y)$	dla każdego x i dla każdego y zachodzi $\varphi(x,y)$

W wyrażeniach $\exists x : \varphi(x,y)$ i $\forall x : \varphi(x,y)$ zmienną x nazywamy *związaną*, a y – *zmienną swobodną*.

1.6. Prawa działań na kwantyfikatorach

Dalej zakładamy, że $\varphi(x)$ jest funkcją zdaniową jednej zmiennej, $\psi(x,y)$ zaś funkcją zdaniową dwóch zmiennych. Poniższa tabela prezentuje najważniejsze prawa rachunku funkcyjnego (tautologie):

1.	$[\sim(\exists x : \varphi(x))] \iff [\forall x : (\sim\varphi(x))]$	*prawo de Morgana*
2.	$[\sim(\forall x : \varphi(x))] \iff [\exists x : (\sim\varphi(x))]$	*prawo de Morgana*
3.	$[\forall x : \varphi(x)] \implies [\exists x : \varphi(x)]$	*prawo egzemplifikacji*
4.	$[\exists x\ \exists y : \psi(x,y)] \iff [\exists y\ \exists x : \psi(x,y)]$	*prawo przestawiania kwantyfikatorów*
5.	$[\forall x\ \forall y : \psi(x,y)] \iff [\forall y\ \forall x : \psi(x,y)]$	*prawo przestawiania kwantyfikatorów*
6.	$[\exists x\ \forall y : \psi(x,y)] \implies [\forall y\ \exists x : \psi(x,y)]$	*prawo przestawiania kwantyfikatorów*

1.12. Oceń wartość logiczną następujących zdań:
a) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{N} : [x+y=2]$, b) $\exists a \in \mathbb{R}\ \exists b \in \mathbb{R} : [(a+b)^2 = a^2+b^2]$,
c) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} : [x<y]$, d) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} : [x<y]$.

1.13. Czy następujące zdania są prawdziwe:
a) $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} : [x^2+ax-2a>0]$,
b) $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R} : [x^2+ax-2a>0]$,
c) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists a \in \mathbb{R} : [x^2+ax-2a>0]$.

Tu i dalej symbolem $\mathbb{N}_1$ oznaczamy zbiór $\{1,2,3,\ldots\}$ (tj. zbiór liczb naturalnych dodatnich), symbolem $\mathbb{R}$ zaś zbiór liczb rzeczywistych (por. s. 20).

1.14. Oto dwa zdania:
a) $\exists a \in \mathbb{R}\ \ \forall x \in \mathbb{R} : [a^2x^2+ax-4>0]$, b) $\exists a \in \mathbb{R}\ \ \forall x \in \mathbb{R} : [x^2+4x+(\frac{1}{2})^a>0]$.
Wykaż, że pierwsze z tych zdań jest fałszywe, drugie zaś prawdziwe.

1.15. Udowodnij, że każde z poniższych zdań jest fałszywe:
a) $\forall x \in \mathbb{R} : [x^2<x]$, b) $\forall x \in \mathbb{R} : [2^x+3^x=5^x]$,
c) $\forall x \in \mathbb{R} : [\sqrt{x^2}=x]$, d) $\forall x \in \mathbb{R} : [(x+3)^2=x^2+9]$.

1.16. Zapisz w języku symbolicznym (z użyciem funktorów zdaniotwórczych oraz kwantyfikatorów) następujące zdania sformułowane w języku potocznym:
1) *Iloczyn liczb ujemnych jest liczbą dodatnią.*
2) *Każdy człowiek ma swoją matkę.*
3) *Istnieją takie dwie liczby naturalne, których suma jest równa 13.*
4) *Każdy odcinek ma dokładnie jeden środek.*
5) *Do każdej liczby naturalnej istnieje liczba naturalna większa od niej.*

6) *Nie w każdy trójkąt można wpisać okrąg.*
7) *Istnieją trójkąty, na których można opisać okrąg.*
8) *Istnieje na płaszczyźnie taka figura, że dla każdych dwu punktów należących do tej figury łączący je odcinek zawiera się w tej figurze.*
9) *Kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest większy od tej liczby.*

1.7. Reguły dowodzenia

W logice do ważniejszych należą tautologie mające postać implikacji.

Definicja 1-5 Jeśli zdanie złożone (formuła zdaniowa) $a \Longrightarrow b$ jest tautologią, to mówimy, że zdanie (formuła zdaniowa) b jest *logiczną konsekwencją* zdania (formuły zdaniowej) a. O formule zdaniowej $a \Longrightarrow b$ mówimy wtedy, że jest *regułą dowodzenia.*

1.17. Udowodnij, że formuła zdaniowa α postaci

$$\{(p \Longrightarrow q) \wedge [p \Longrightarrow (\sim q)]\} \Longrightarrow (\sim p)$$

jest tautologią (a więc tym samym, że jest regułą dowodzenia).

Rozwiązanie zadania prezentuje następująca tabela:

p	q	$p \Longrightarrow q$	$\sim q$	$p \Longrightarrow (\sim q)$	$(p \Longrightarrow q) \wedge [p \Longrightarrow (\sim q)]$	$\sim p$	α
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1

■ Tautologia $[p \wedge (p \Longrightarrow q)] \Longrightarrow q$ jest regułą dowodzenia, zwaną *regułą odrywania*, albo *regułą modus ponens.*

■ Regułą dowodzenia jest tautologia $[(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow r)] \Longrightarrow (p \Longrightarrow r)$. Jest to tzw. *reguła sylogizmu.*

■ Regułą dowodzenia jest także tautologia $[(\sim q) \Longrightarrow (\sim p)] \Longrightarrow (p \Longrightarrow q)$, zwana *regułą kontrapozycji.*

Dowód nie wprost twierdzenia $p \Longrightarrow q$ polega na tym, że z koniunkcji założenia p i zaprzeczenia tezy q wyprowadzamy zaprzeczenie założenia, a następnie korzystamy z równoważności $\{[p \wedge (\sim q)] \Longrightarrow (\sim p)\} \Longleftrightarrow (p \Longrightarrow q)$.

Inna z metod dowodu nie wprost twierdzenia $p \Longrightarrow q$ opiera się na pomocniczym dowodzie twierdzenia $(\sim q) \Longrightarrow (\sim p)]$ i tautologii $[(\sim q) \Longrightarrow (\sim p)] \Longleftrightarrow (p \Longrightarrow q)$.

Aby udowodnić, że zdanie $\forall x : \varphi(x)$ jest fałszywe, można posłużyć się metodą kontrprzykładu, tzn. wystarczy znaleźć jedną wartość $\overline{x}$ z dziedziny funkcji zdaniowej $\varphi(x)$, dla której $\varphi(\overline{x})$ jest zdaniem fałszywym. Poprawność rozumowania wynika z praw de Morgana dla kwantyfikatorów.

Twierdzenie 1-1 [ZASADA INDUKCJI MATEMATYCZNEJ]*: Niech dziedziną funkcji zdaniowej $\varphi(n)$ będzie zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Niech n_0 będzie ustaloną liczbą naturalną. Tautologia*

$$\{\varphi(n_0) \wedge \forall n \geqslant n_0[\varphi(n) \Longrightarrow \varphi(n+1)]\} \Longrightarrow \{\forall n : [(n \geqslant n_0) \Longrightarrow \varphi(n)]\}$$

jest regułą dowodzenia twierdzenia $\forall n : [(n \geqslant n_0) \Longrightarrow \varphi(n)]$.

Dowody matematycznych twierdzeń, w których korzysta się z zasady indukcji, nazywamy *dowodami indukcyjnymi*. Mowa tu o następującym wnioskowaniu:

> Jeżeli A jest podzbiorem zbioru $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ liczb naturalnych takim, że
> 1° $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ [n_0 \in A]$ i
> 2° $\forall n \in \mathbb{N}\ [(n \geqslant n_0) \wedge (n \in A) \Longrightarrow (n+1) \in A]$,
> to $\{n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots\} \subset A$,

czyli inaczej:

> jeżeli pewien zbiór A, którego elementami są liczby naturalne, ma własności:
> 1° liczba k należy do tego zbioru oraz
> 2° ilekroć liczba n, gdzie $n \geqslant k$, należy do zbioru A, to liczba $(n+1)$ także należy do zbioru A,
> to do zbioru A należy każda liczba naturalna n większa bądź równa k.

1.18. Niech x będzie dowolną liczbą rzeczywistą i taką, że $x \geqslant -1$. Stosując zasadę indukcji udowodnij, że dla każdego $n = 1, 2, 3, \ldots$ zachodzi nierówność

$$(*) \qquad (1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

□ Jest $(1+x)^1 = 1 + x \geqslant 1 + x$, a więc nierówność $(*)$ jest prawdziwa dla $n = 1$.

□ Załóżmy, że $(1+x)^k \geqslant 1 + kx$. Korzystając z tego założenia i z faktu, że $1 + x \geqslant 0$ dla $x \geqslant -1$, mamy:

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geqslant (1+kx)(1+x).$$

Ale $(1+kx)(1+x) = 1 + kx + x + kx^2 \geqslant 1 + kx + x = 1 + (k+1)x$. Mamy więc układ nierówności

$$(1+x)^k(1+x) \geqslant (1+kx)(1+x) \quad \text{i} \quad (1+kx)(1+x) \geqslant 1 + (k+1)x.$$

Z przechodniości nierówności wynika, że

$$(1+x)^k(1+x) \geqslant 1 + (k+1)x, \quad \text{czyli} \quad (1+x)^{k+1} \geqslant 1 + (k+1)x.$$

Z faktu, że nierówność $(*)$ jest prawdziwa dla $n = k$ wynika więc, że jest prawdziwa dla $n = k+1$. Na mocy zasady indukcji nierówność $(*)$ jest prawdziwa dla każdego $n = 1, 2, 3, \ldots$, co należało wykazać.

1.19. Jeśli k i m są liczbami naturalnymi, to symbol $k|m$ oznacza, że liczba k jest dzielnikiem liczby m. Udowodnij indukcyjnie, że:

a) $2|n(n+1)$ dla każdego $n = 1, 2, 3, \ldots$,
b) $3|(n^4 - n^2)$ dla każdego $n = 1, 2, 3, \ldots$,
c) $3|(n^3 - n)$ dla każdego $n = 1, 2, 3, \ldots$,
d) $2^n > n^2$ dla każdego $n = 5, 6, 7, \ldots$.
e) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ dla $n \in \mathbb{N}_2$,
f) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ dla każdego $n = 2, 3, 4, \ldots$,
g) dla każdego $n = 1, 2, 3, \ldots$ różnica $(10^n - 4)$ jest podzielna przez 6.

□ Rozwiążemy zadanie g). Niech $a_n = 10^n - 6$.

1° Jest $a_1 = 10 - 4 = 6$, a więc a_1 jest podzieln przez 6.

2° Załóżmy, że a_k jest podzielne przez 6. Oznacza to, że $10^k - 4 = 6j$, gdzie j jest pewną liczbą ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Zauważ, że

$$a_{k+1} = 10^{k+1} - 4 = 10 \cdot 10^k - 4 = 10 \cdot 10^k - 40 + 36 = 10(10^k - 4) + 36 = 10 \cdot (6j) + 36 = 6(10j + 6).$$

Liczba $(10j + 6)$ jest liczbą ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots\}$, a więc a_{k+1} jako wielokrotność liczby 6, jest podzielne przez 6. Za pomocą zasady indukcji udowodniliśmy więc, że dla każdego $n = 1, 2, 3, \ldots$, różnica $(10^n - 4)$ jest podzielna przez 6.

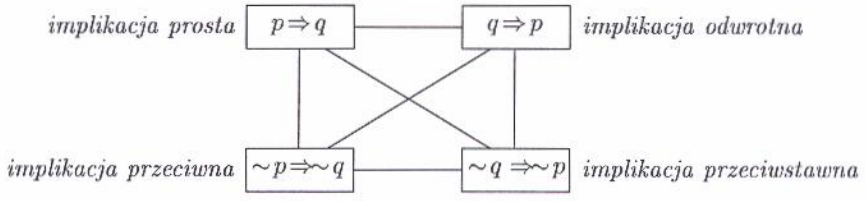
1.8. Zamknięty układ implikacji – kwadrat logiczny

Niech p i q będą zdaniami. Mamy cztery różne implikacje utworzone z tych zdań:

1) $p \Longrightarrow q$ – *implikacja prosta*,
2) $q \Longrightarrow p$ – *implikacja odwrotna*,
3) $(\sim p) \Longrightarrow (\sim q)$ – *implikacja przeciwna*,
4) $(\sim q) \Longrightarrow (\sim p)$ – *implikacja przeciwstawna*, albo *kontrapozycja*.

Z rozwiązania zadania 1.6 wynika, że z prawdziwości implikacji prostej $p \Longrightarrow q$ nie wynika ani prawdziwość implikacji odwrotnej $q \Longrightarrow p$ ani prawdziwość implikacji przeciwnej $(\sim p) \Longrightarrow (\sim q)$. Z prawdziwości implikacji prostej $p \Longrightarrow q$ wynika natomiast prawdziwość implikacji przeciwstawnej $(\sim q) \Longrightarrow (\sim p)$ (tj. kontrapozycji).

Zauważmy, że implikacja przeciwna jest implikacją przeciwstawną (jest kontrapozycją) dla implikacji odwrotnej. Z prawdziwości implikacji odwrotnej wynika zatem prawdziwość implikacji przeciwnej.



Rys. 1 Kwadrat logiczny

W wierzchołkach kwadratu z rysunku 1 umieszczone cztery implikacje utworzone ze zdań a i b. Implikacje, które łączy przekątna kwadratu są równoważne, a więc jednocześnie prawdziwe bądź jednocześnie fałszywe. Rysunek 1 przedstawia tzw. *kwadrat logiczny*.

Aby wszystkie cztery implikacje były prawdziwe potrzeba i wystarcza, aby były prawdziwe dowolne dwie implikacje znajdujące się w sąsiednich wierzchołkach kwadratu logicznego z rys. 1.

1.20. Załóżmy, że $x \in \mathbb{R}$ i rozważmy implikację „*jeżeli* $x > 0$, *to* $x^2 > 0$". Sformułuj implikację: a) odwrotną, b) przeciwstawną, c) przeciwną. Które z nich są prawdziwe?

1.21. Dla każdej z poniższych implikacji sformułuj implikację odwrotną, przeciwną i implikację przeciwstawną (kontrapozycję):

J1. *Jeżeli* $x + y = 1$, *to* $x^2 + y^2 \geqslant 1$,

J2. *Jeżeli* $2 + 2 = 4$, *to* $5 + 5 = 13$,

J3. *Jeżeli sumy długości przeciwległych boków czworokąta są równe, to w ten czworokąt da się wpisać okrąg,*

J4. *Jeśli sumy kątów przeciwległych w czworokącie są równe, to w ten czworokąt da się wpisać okrąg,*

J5. *Jeśli suma dwu kątów w trójkącie jest równa* $\frac{\pi}{2}$, *to ten trójkąt jest prostokątny.*

Dla każdej implikacji, o jakiej mowa w tym zadaniu, rozstrzygnij, czy jest ona prawdziwa.

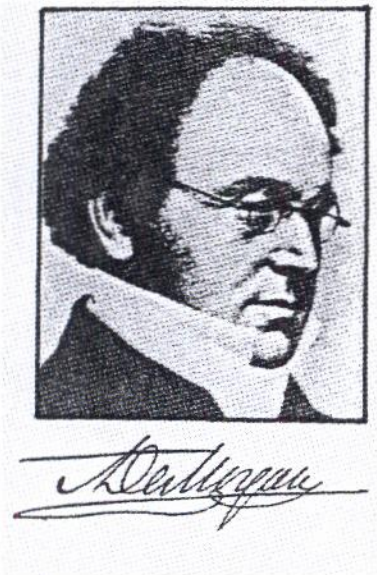
1.22. Rozważmy następujące implikacje:

J6. *Jeśli suma cyfr liczby naturalnej n dzieli się przez 9, to ta liczba jest podzielna przez 9,*

J7. *Jeżeli liczba naturalna n jest podzielna przez 4, to n jest liczbą parzystą,*

J8. *Jeśli czworokąt jest rombem, to jego przekątne przecinają się w punkcie, który jest ich środkiem.*

Utwórz dla każdej z tych implikacji trzy pozostałe, które tworzą zamknięty układ implikacji (a więc kwadrat logiczny). Wskaż implikacje, które są zdaniami prawdziwymi.



Rys. 2 August de Morgan
(1806-1871)



Rys. 3 Abraham de Moivre
(1667-1754)

2. Algebra zbiorów

2.1. Zbiór jako pojęcie matematyczne

Pojęcie *zbioru* jest w matematyce pojęciem pierwotnym. Zbiorem jest:
— grupa ludzi na przedstawieniu w teatrze, bądź pasażerów jadących autobusem,
— zestaw wszystkich książek w bibliotece PWSZ w Nowym Sączu 1 maja 2009,
— talia 52 kart do gry w bridża.
Mówimy o zbiorze wszystkich liter alfabetu łacińskiego, o zbiorze wszystkich możliwych wyników rzutu kostką, o zbiorze boków n-kąta wypukłego, o zbiorze rozwiązań nierówności $x^2 - 13 > 0$ itd.

Wielościany foremne, których krawędzie są odcinkami o długości 1, tworzą zbiór o pięciu elementach: czworościan (*tetraedr*), sześcian (*hexaedr*), ośmiościan (*oktaedr*), dwunastościan (*dodekaedr*) i dwudziestocian (*ikosaedr*). W geometrii mówi się o *pęku prostych przechodzących przez punkt a*. Ten pęk jest zbiorem wszystkich tych prostych na płaszczyźnie euklidesowej, które przechodzą przez punkt a. Analogicznie mówi się o *pęku prostych równoległych* jako o zbiorze wszystkich prostych leżących na płaszczyźnie euklidesowej i równoległych do pewnej prostej L. Także w geometrii mówi się o zbiorze przekształceń oraz o zbiorze szczególnych przekształceń, jakimi są izometrie.

Dział matematyki, który zajmuje się badaniem ogólnych własności zbiorów, niezależnie od natury przedmiotów, z których te zbiory są tworzone, nazywamy *teorią mnogości*. Powstała ona w latach 1871-1883, a jej twórcą był Georg Cantor[1].

Przedmioty, które należą do danego zbioru, nazywamy *elementami*. Zdanie orzekające, że *element a należy do zbioru A* (*a jest elementem zbioru A*), zapisujemy w postaci $a \in A$. Symbol $\in$ wprowadził G. Peano[2] i jest pierwszą literą greckiego słowa $\epsilon\sigma\tau\iota$ („jest"). Jeśli a nie należy do zbioru A, to piszemy $a \notin A$ lub $\sim (a \in A)$. Symbol $\sim$ jest zniekształconą literą N od *„nego"*, co znaczy *„przeczę"*.

W matematyce wprowadza się pojęcie *zbioru pustego*, tj. zbioru nie posiadającego żadnego elementu. Zbiór pusty oznacza się $\emptyset$. Jest takim np. zbiór rzeczywistych pierwiastków równania $x^2 + 1 = 0$ lub zbiór pierwiastków nierówności $x^2 + 1 < 0$.

■ Zbiór można określić słownym opisem: *zbiór studentów PWSZ w Nowym Sączu w dniu 13 października 2009 roku, zbiór możliwych wyników losowania sześciu liczb w Toto Lotku, zbiór kamieni domina, zbiór autobusów Miejskiego Przedsiębiorstwa Komunikacyjnego w Krakowie 1 stycznia 2009 r.* itd.

Zbiór można określić wypisując w klamrach $\{...\}$ wszystkie jego elementy i rozdzielając je przecinkiem. Zbiór, którego elementami są obiekty $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_s$, oznaczamy $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_s\}$. Zbiór, którego jedynym elementem jest a, oznaczamy przez $\{a\}$. Zapis $\{\clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \heartsuit\}$ oznacza zbiór maści w talii kart.

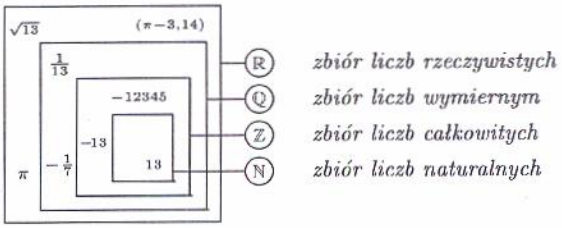
■ Zapis $\{\frac{1}{2}, (\frac{1}{2})^2, (\frac{1}{2})^3, (\frac{1}{2})^4, \ldots\}$ oznacza nieskończony zbiór naturalnych potęg ułamka $\frac{1}{2}$. Elementy tego zbioru są więc wyrazami pewnego ciągu geometrycznego, ale kolejność, w jakiej je rozważamy, nie ma tu znaczenia. Wielokropek zastępuje pozostałe elementy, a elementy przed wielokropkiem jednoznacznie sugerują jakie są elementy pominięte w zapisie.

---

[1] Georg Ferdinand Ludwig Cantor (1845-1918), matematyk niemiecki.
[2] Giuseppe Peano (1858-1932), matematyk włoski.

Znane zbiory liczbowe oznaczamy następująco:
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ – zbiór liczb naturalnych,
$\mathbb{N}_k = \{k, k+1, k+2, \ldots\}$ – zbiór liczb naturalnych większych lub równych k,
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ – zbiór liczb całkowitych,
$\mathbb{Q}$ – zbiór liczb wymiernych,
$\mathbb{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych,
$\mathbb{C}$ – zbiór liczb zespolonych (wprowadzimy ten zbiór na s. 251),
$\mathbb{Z}_+$ – zbiór liczb całkowitych dodatnich,
$\mathbb{Z}_-$ – zbiór liczb całkowitych ujemnych,
$\mathbb{Q}_+$ – zbiór liczb wymiernych dodatnich,
$\mathbb{Q}_-$ – zbiór liczb wymiernych ujemnych,
$\mathbb{R}_+$ – zbiór liczb rzeczywistych dodatnich,
$\mathbb{R}_-$ – zbiór liczb rzeczywistych ujemnych.
Oznaczenia te pochodzą od początkowych liter słów: *Natural*, *Zahl*, *Quotient*, *Real*.

Zapis $x \in \mathbb{N}$ czytamy także: *x jest liczbą naturalną*, zapis $x \in \mathbb{R}$ czytamy: *x jest liczbą rzeczywistą*.



Rys. 4 Zbiory liczbowe i ich niektóre elementy

Zbiór można określić za pomocą funkcji zdaniowej jednej lub wielu zmiennych. Zapis $\{x : \varphi(x)\}$ określa zbiór tych elementów z dziedziny funkcji zdaniowej $\varphi(x)$, które spełniają tę funkcję zdaniową. Mówimy, że w tym przypadku zbiór zostaje określony przez podanie warunku koniecznego i wystarczającego na to, by element należał do zbioru.

■ Zapis $\{x : (x \in \mathbb{R}) \wedge (x^2 - 2x + 1 = 0)\}$, albo krótko $\{x : x^2 - 2x + 1 = 0\}$ oznacza zbiór liczb rzeczywistych spełniających równanie kwadratowe $x^2 - 2x + 1 = 0$, a więc zbiór pierwiastków tego równania, czyli jego rozwiązanie (por. s. 13).

■ Nierówność $x^2 + y^2 < 4$ jest funkcją zdaniową dwu zmiennych. Jej dziedziną jest zbiór wszystkich par (x, y), gdzie x i y są liczbami rzeczywistymi. Dziedziną tej funkcji zdaniowej jest zatem zbiór $\{(x, y) : (x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})\}$. Niech

$$A := \{(x, y) : (x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R}) \wedge (x^2 + y^2 < 4)\}.$$

Jest więc A zbiorem wszystkich par liczb rzeczywistych spełniających funkcję zdaniową $x^2 + y^2 < 4$, tj. pewną nierówność o dwóch niewiadomych. Interpretujmy parę (x, y) liczb rzeczywistych jako punkt na płaszczyźnie z układem współrzędnych. W tej geometrycznej interpretacji pary liczb rzeczywistych, A jest zbiorem wszystkich punktów odległych od początku układu współrzędnych o mniej niż 2, a więc A jest wnętrzem koła o środku w punkcie (0,0) i promieniu $r = 2$.

■ [POPULACJA JAKO ZBIÓR] Dowolny zbiór, którego elementy interesują nas z uwagi na pewną cechę, nazywamy *populacją*. Populacją jest zbiór wszystkich polskich miast a cechą liczba mieszkańców miasta. Populacją jest zbiór nauczycieli, a cechą w tej populacji wysokość miesięcznych zarobków nauczyciela.

2.1. Określ zbiory:
$A := \{(x,y) : (x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + 4^2 = 4)\}$,
$B := \{(x,y) : (x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x + y = 4)\}$,
$C := \{(x,y) : (x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge y = x^2)\}$.

2.2. Określ zbiory $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{R}_+$ oraz $\mathbb{Z}_-$, $\mathbb{Q}_-$, $\mathbb{R}_-$, podając warunek konieczny i wystarczający na to, aby element do tego zbioru należał. Każdy z tych zbiorów należy zatem określić jako zbiór elementów spełniających pewną funkcję zdaniową jednej zmiennej.

2.2. Inkluzja – diagramy Venna

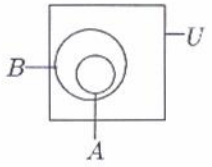
Definicja 2-1 Jeśli każdy element zbioru A jest elementem zbioru B, to mówimy, że A jest *podzbiorem zbioru* B, albo – że zbiór A *zawiera się* w zbiorze B i zapisujemy $A \subset B$. Symbol $\subset$ nazywamy *znakiem inkluzji.*

Z definicji wynika, że $A \subset B$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego x spełniony jest warunek: *jeśli* $x \in A$, *to* $x \in B$. Zamiast słów *„jeśli..., to..."* używamy symbolu $\Longrightarrow$, zamiast słów *„wtedy i tylko wtedy, gdy..."* używamy symbolu $\Longleftrightarrow$. Jest więc:

$$(A \subset B) \Longleftrightarrow \{\forall x : [(x \in A) \Longrightarrow (x \in B)]\}.$$

Jeśli A jest zbiorem liczb naturalnych i B jest zbiorem liczb całkowitych, to $A \subset B$, czyli inaczej $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Jest $\mathbb{N}_6 \subset \mathbb{N}_5$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, $(-\infty, 8) \subset \mathbb{R}$, $(a,b) \subset [a,b]$.

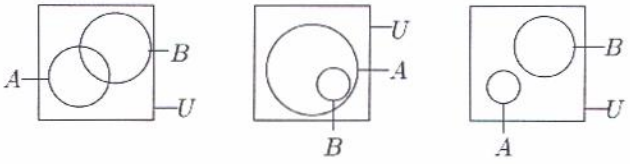
Związki między zbiorami ilustrujemy za pomocą *diagramów Venna.* Chodzi o pewną interpretację zbioru jako podzbioru płaszczyzny. Rysunek 5 prezentuje za pomocą diagramów Venna dwa zbiory A i B jako podzbiory zbioru U, gdzie $A \subset B$. Na rysunku 4 przedstawiono za pomocą diagramów Venna zbiory liczbowe $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$.



Rys. 5 Prezentacja zbiorów A i B jako podzbiorów zbioru U za pomocą diagramów Venna

Jeśli A nie jest podzbiorem zbioru B, to piszemy $\sim (A \subset B)$, albo $A \not\subset B$. Jest

$$\sim (A \subset B) \Longleftrightarrow \{\exists x : [(x \in A) \wedge (x \notin B)]\}.$$



Rys. 6 Diagramy Venna zbiorów A i B jako podzbiorów zbioru U

Na rysunku 6 mamy diagramy Venna takich zbiorów A i B, że $\sim (A \subset B)$.

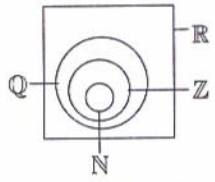
Zbiory A i B *są równe* (co zapisujemy: $A = B$) wtedy i tylko wtedy, gdy mają te same elementy, a więc $(A = B) \Longleftrightarrow [\forall x : (x \in A) \Longleftrightarrow (x \in B)]$.

■ Niech A będzie zbiorem liczb naturalnych podzielnych przez 2 i przez 3. Jeśli B jest zbiorem liczb naturalnych podzielnych przez 6, to zbiory A i B są równe, $A = B$.

Twierdzenie 2-1 *Jeśli A, B i C są zbiorami, to:*

1.	$\emptyset \subset A$	
2.	$A \subset A$ *(każy zbiór jest swoim podzbiorem)*	*prawo zwrotności*
3.	$[(A \subset B) \wedge (B \subset C)] \Longrightarrow (A \subset C)$	*prawo przechodniości*
4.	$[(A \subset B) \wedge (B \subset A)] \Longrightarrow (A = B)$	*prawo antysymetrii*
5.	$[\sim (A = B)] \Longrightarrow \{[\sim (A \subset B)] \vee [\sim (B \subset A)]\}$	

Jeśli A jest zbiorem co najmniej dwuelementowym, to $\emptyset$ i A są jego podzbiorami. Nazywamy je *niewłaściwymi podzbiorami zbioru A.*



Rys. 7 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ i $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ i $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Rysunki 4 i 7 prezentują zbiory $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ jako podzbiory zbioru $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych.

2.3. Przedziały liczbowe jako szczególne zbiory

Definicja 2-2 Załóżmy, że $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ i $a < b$. *Przedziałem liczbowym otwartym* nazywamy zbiór $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$. Do przedziałów liczbowych otwartych zaliczamy także następujące zbiory:
$(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$, $(b, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > b\}$, $(-\infty, +\infty) := \{x : x \in \mathbb{R}\}$.

■ Przedziałami otwartymi są następujące zbiory: $(\sqrt{13}, 13)$, $(-1, \frac{1}{100})$, $(0, 1)$, $(-\pi, \pi)$.

Definicja 2-3 Niech $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ i $a < b$. *Przedziałem liczbowym domkniętym* nazywamy zbiór $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$.

■ Zapis $[-\pi, \pi]$ oznacza zbiór wszystkich liczb rzeczywistych nie mniejszych niż $-\pi$ i równocześnie nie większych niż π.

2.3. Niech $a = 3,14$. Jakim zbiorem jest przedział (a, π)? A jakim przedział $[a, \pi]$? Rozstrzygnij, czy są zdaniami prawdziwymi następujące wyrażenia: $3,14 \in [-\pi, +\pi]$, $\sqrt{\pi} \in [-\pi, +\pi]$, $\pi \in (-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}]$.

Definicja 2-4 Niech $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ i $a < b$. *Przedziałami jednostronnie domkniętymi* nazywamy następujące zbiory liczbowe:

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}, \quad [a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\},$$
$$(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant b\}, \quad [a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant a\}.$$

Definicja 2-5 Zbiory: (a, b), $[a, b)$, $[a, b)$ i $[a, b]$ nazywamy *przedziałami właściwymi.* Zbiory: $(-\infty, b), (-\infty, b], (a, +\infty), [a, +\infty)$ i $(-\infty, +\infty)$ nazywamy *przedziałami niewłaściwymi.* Jest $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

2.4. Dane są trzy zbiory liczbowe: $\{0, 1\}$, $(0, 1)$ oraz $[0, 1]$. Oceń wartość logiczną następujących zdań:

a) $\{0, 1\} \subset (0, 1)$, b) $\{0, 1\} \subset [0, 1]$, c) $(0, 1) \subset [0, 1]$,
d) $\{0, 1\} \subset \mathbb{Z}$, e) $\frac{\pi}{4} \in (0, 1) \wedge \frac{1}{\sqrt{2}} \in (0, 1)$, f) $[0, 1] \subset \mathbb{Q}$.

2.4. Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej

Definicja 2-6 *Wartością bezwzględną liczby rzeczywistej* x nazywamy:
— tę samą liczbę x, gdy x jest liczbą dodatnią i
— liczbę przeciwną do x, gdy x jest liczbą ujemną i
— liczbę 0, gdy $x = 0$.
Wartość bezwzględną liczby x oznaczamy symbolem $|x|$.

Jeżeli $x \in \mathbb{R}$, to

$$|x| = \begin{cases} x, & gdy\ x \geqslant 0, \\ -x, & gdy\ x < 0. \end{cases}$$

2.5. Znajdź: $|\pi|$, $|\pi - 4|$, $|3,14 - \pi|$, $|\frac{1}{n} - 1|$, $|3 - \sqrt{13}|$, $|sinx - \sqrt{3}|$.

Z definicji wartości bewzględnej wynika, że:

a) $\forall x \in \mathbb{R} : (|x| \geqslant 0)$,
b) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : (|x \cdot y| = |x| \cdot |y|)$,
c) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) : (|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|})$,
d) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : (|x + y| \leqslant |x| + |y|)$.

Liczbę rzeczywistą a możemy utożsamiać z punktem o współrzędnej a na osi liczbowej. W rozważaniach (w rachunkach) związanych z wartością bezwzględną będziemy się odwoływać do następującej geometrycznej interpretacji wartości bezwzględnej.

> Jeśli $a \in \mathbb{R}$, to $|a|$ jest odległością liczby a od początku osi liczbowej.
> Jeśli $a \in \mathbb{R}$ i $b \in \mathbb{R}$, to $|a - b|$ jest odległością liczb a i b na osi liczbowej.

■ Niech r będzie ustaloną liczbą rzeczywistą dodatnią. Zbiór $\{x \in \mathbb{R} : |x| < r\}$ jest zbiorem tych punktów na osi liczbowej, które są odległe od początku osi o mniej niż r. Ten zbiór jest więc przedziałem liczbowym $(-r, r)$.

■ Zbiór $\{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\}$ jest zbiorem tych punktów na osi liczbowej, które są odległe od punktu a o mniej niż r. Taki zbiór jest zatem przedziałem liczbowym $(a - r, a + r)$.

2.6. Niech $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 < |x - \frac{1}{2}| < 2\}$ i $B = \{x \in \mathbb{R} : |x - 2| > 3\}$. Przedstaw zbiory A i B jako przedziały liczbowe lub jako sumy mnogościowe takich przedziałów.

2.7. Dane są trzy zbiory liczbowe:
$A = \{x : (x \in \mathbb{R}) \wedge (|x - \pi| < 1)\}$,
$B = \{x : (x \in \mathbb{R}) \wedge (|x - \frac{1}{2}| \geqslant 2)\}$ i
$C = \{x : (x \in \mathbb{N}) \wedge (|x - 13| < 50) \wedge (|x - 17| > 5)\}$.
Określ każdy z tych zbiorów za pomocą przedziałów liczbowych.

2.5. Suma, iloczyn i różnica zbiorów

Definicja 2-7 [SUMA MNOGOŚCIOWA ZBIORÓW] *Sumą mnogościową*, albo krócej: *sumą zbiorów* A *i* B nazywamy zbiór tych elementów, z których każdy jest elementem zbioru A lub zbioru B. Sumę zbiorów A i B oznaczamy $A \cup B$. Jest więc

$$A \cup B := \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

Przez *sumę zbiorów* A *i* B rozumiemy więc *zbiór*, którego elementami są wszystkie elementy zbioru A i wszystkie elementy zbioru B i w którym nie ma innych elementów.

■ Jeśli $A = \{\oplus, \ominus, \triangle, \bigtriangledown\}$ i $B = \{\bigstar, \ominus, \heartsuit, \bigtriangledown, \spadesuit\}$, to $A \cup B = \{\oplus, \ominus, \triangle, \bigstar, \heartsuit, \bigtriangledown, \spadesuit\}$.

Definicja 2-8 [ILOCZYN MNOGOŚCIOWY ZBIORÓW] *Iloczynem mnogościowym*, albo krócej *ilocyznem zbiorów* A *i* B nazywamy zbiór $A \cap B$ tych elementów, które należą (równocześnie) do zbioru A i do zbioru B. Jest zatem

$$A \cap B := \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

Iloczyn $A \cap B$ *nazywamy także częścią wspólną, albo przekrojem zbiorów* A *i* B.

■ Jeśli $A = \{\oplus, \ominus, \triangle, \bigtriangledown\}$ i $B = \{\bigstar, \ominus, \heartsuit, \bigtriangledown, \spadesuit\}$, to $A \cap B = \{\ominus, \bigtriangledown\}$.

Definicja 2-9 [ZBIORY ROZŁĄCZNE] Zbiory A i B nazywamy *rozłącznymi*, jeśli nie mają wspólnych elementów, tzn. jeśli $A \cap B = \emptyset$.

■ Przedziały liczbowe $(-\sqrt{7}, \pi)$ i $[\pi, 13)$ są zbiorami rozłącznymi.

Definicja 2-10 [RÓŻNICA MNOGOŚCIOWA ZBIORÓW] Zbiór tych wszystkich elementów zbioru A, które nie należą do zbioru B, nazywamy *różnicą zbiorów* A i B i oznaczamy $A \setminus B$. Zatem

$$A \setminus B := \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

■ Jeśli $A = \{\oplus, \ominus, \triangle, \bigtriangledown\}$ i $B = \{\bigstar, \ominus, \heartsuit, \bigtriangledown, \spadesuit\}$, to $A \setminus B = \{\oplus, \triangle\}$.

Definicja 2-11 [RÓŻNICA SYMETRYCZNA ZBIORÓW] *Różnicą symetryczną zbiorów* A *i* B nazywamy zbiór

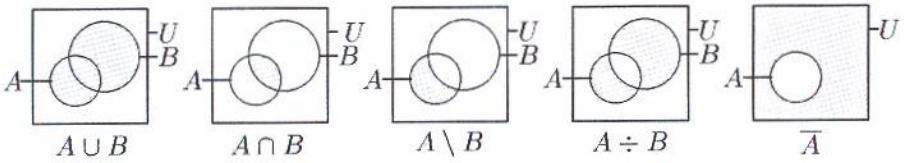
$$A \div B := \{x : (x \in A \setminus B) \vee (x \in B \setminus A)\}.$$

Załóżmy, że wszystkie zbiory rozpatrujemy jako podzbiory pewnego ustalonego zbioru U, który nazywamy *przestrzenią*.

Definicja 2-12 [DOPEŁNIENIE ZBIORU] *Dopełnieniem* zbioru A do przestrzeni U nazywamy zbiór tych elementów zbioru U, które nie należą do zbioru A. Dopełnienie zbioru A do przestrzeni U oznaczamy przez $\overline{A}$. Mamy więc

$$\overline{A} := U \setminus A = \{x : x \in U \wedge x \notin A\}.$$

■ Jeśli U jest zbiorem 52 kart talii bridżowej, A zaś jest zbiorem kart czerwonych (kara i kiery), to $\overline{A}$ jest zbiorem kart czarnych (piki i trefle).



Rys. 8 Działania na zbiorach a diagramy Venna

Z definicji działań mnogościowych ($\cup$, $\cap$, $\setminus$ i dopełnienia zbioru) wynikają następujące ich własności:

1) $A \cup A = A$,
2) $A \cap A = A$,
3) $A \cup \emptyset = A$,
4) $A \cap \emptyset = \emptyset$,
5) $A \cup B = B \cup A$ (*prawo przemienności sumy mnogościowej*),

6) $A \cap B = B \cap A$ (*prawo przemienności iloczynu mnogościowego*),
7) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (*prawo łączności sumy mnogościowej*),
8) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (*prawo łączności iloczynu mnogościowego*),
9) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (*prawo rozdzielności iloczynu względem sumy*),
10) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (*prawo rozdzielności sumy względem iloczynu*),
11) $A \cup \overline{A} = U$,
12) $\overline{U} = \emptyset$,
13) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$,
14) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Sumę mnogościową i iloczyn uogólniamy na większą liczbę zbiorów. Mamy

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j := A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n, \quad \bigcap_{j=1}^{n} A_j := A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n.$$

Jeżeli $J = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, to zapis $\{A_j\}_{j \in J}$ oznacza zbiór $\{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n\}$, a więc pewną rodzinę zbiorów.

Zapis $\bigcup_{j \in J} A_j$ oznacza sumę $\bigcup_{j=1}^{n} A_j$. Analogicznie $\bigcap_{j \in J} A_j := \bigcap_{j=1}^{n} A_j$.

Zauważmy, że

$$[x \in \bigcup_{j \in J} A_j] \Longleftrightarrow [\exists j \in J : x \in A_j] \quad \text{oraz} \quad [x \in \bigcap_{j \in J} A_j] \Longleftrightarrow [\forall j \in J : x \in A_j].$$

2.8. Niech $J = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ oraz $A_j = [j-1, j)$ i $B_j = [0, \frac{1}{j}]$ dla $j \in J$. Jakimi zbiorami są:

$$\bigcup_{j \in J} A_j \quad \text{oraz} \quad \bigcap_{j \in J} B_j?$$

2.9. Załóżmy, że A i B są podzbiorami tej samej przestrzeni U. Wykaż, że
1) $(A \subset B) \Longleftrightarrow (A \cup B = B)$, 2) $(A \subset B) \Longleftrightarrow (A \cap B = A)$,
3) $(A \subset B) \Longleftrightarrow (\overline{B} \subset \overline{A})$, 4) $(A \cap B = A \cup B) \Longleftrightarrow (A = B)$.

2.10. Udowodnij, że jeśli A, B i C są podzbiorami tej samej przestrzeni U, to:
1) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$,
2) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$,
3) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$,
4) $A \cup (B \cup C) = A \cup (B \setminus A) \cup [C \setminus (A \cup B)]$.

2.11. Niech A oznacza zbiór wszystkich trójkątów równobocznych na płaszczyźnie, B – zbiór wszystkich trójkątów równoramiennych, a C – zbiór wszystkich trójkątów prostokątnych. Określ zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cap C$, $A \setminus C$ oraz $C \setminus A$.

2.12. Dane są zbiory: $A = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge |x - 3| \leqslant 2\}$ i $B = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge |x| \geqslant 3\}$. Określ zbiory $A \cap B$ i $A \setminus B$.

2.13. Dane są trzy zbiory:
$A = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x^2 - 9 < 0\}, B = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge \frac{4}{x+2} > 1\}, C = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge |x| = x\}$.
Określ zbiory: $(A \cap B) \setminus C$ oraz $C \setminus (A \cup B)$.

2.14. Przedstaw każdy z poniższych zbiorów wyliczając jego elementy.
$A = \{n : n \in \mathbb{N} \wedge (n^2 - 4)(n^2 - 25) = 0\}$,
$B = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x^2 + 2x - 8 = 0\}$,
$C = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x^2 + 13 = 0\}$.
Określ zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup C$, $A \cap C$, $B \cup C$ i $B \cap C$.

2.15. Przedstaw na płaszczyźnie z układem współrzędnych zbiór $A \cap B$, gdzie $A = \{(x, y) : (x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R}) \wedge (y - x^2 > 0\}$ i $B = \{(x, y) : (x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R}) \wedge x + y < 1\}$.

2.6. Zbiory liczbowe ograniczone

Dalej rozważać będziemy zbiory liczbowe, a więc podzbiory zbioru $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych. Elementy tych zbiorów są liczbami rzeczywistymi, możemy je zatem interpretować jako punkty na osi liczbowej.

Definicja 2-13 [ZBIÓR OGRANICZONY OD DOŁU] Zbiór A zawarty w zbiorze $\mathbb{R}$ nazywamy *ograniczonym od dołu*, jeżeli

$$\exists a \in \mathbb{R}\ \forall x \in A : [x \geqslant a].$$

O liczbie a mówimy, że *ogranicza zbiór A od dołu.*

Definicja 2-14 [ZBIÓR OGRANICZONY OD GÓRY] Zbiór A zawarty w zbiorze $\mathbb{R}$ nazywamy *ograniczonym od góry*, jeżeli

$$\exists b \in \mathbb{R}\ \forall x \in A : [x \leqslant b].$$

O liczbie b mówimy, że *ogranicza zbiór A od góry.*

■ Zbiór $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\} \cup \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$ jest ograniczony od dołu. Liczbą, która ten zbiór ogranicza od dołu, jest np. 0. Ten zbiór nie jest ograniczony od góry.

Definicja 2-15 [ZBIÓR OGRANICZONY] Zbiór A zawarty w zbiorze $\mathbb{R}$ nazywamy *ograniczonym*, jeśli

$$\exists a \in \mathbb{R}\ \exists b \in \mathbb{R}\ \forall x \in A : [a \leqslant x \leqslant b].$$

Zbiór liczbowy A jest ograniczony jeśli jest ograniczony od dołu i ograniczony od góry. Nietrudno zauważyć, że zbiór liczbowy A jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\exists c \in \mathbb{R}\ \forall x \in A : [|x| \leqslant c].$$

Definicja 2-16 [MINIMUM ZBIORU] *Minimum* zbioru A nazywamy najmniejszą liczbę tego zbioru (jeśli taka w zbiorze istnieje) i oznaczamy symbolem $minA$.

■ Jest więc $min\mathbb{N} = 0$ oraz $min\mathbb{N}_k = k$. Jeśli $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$, to $min[a, b) = a$. Żaden ze zbiorów: (a, b), $(a, b]$, $(-\infty, b)$, $\mathbb{Z}$ i $\{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$ nie posiada minimum.

Definicja 2-17 [MAKSIMUM ZBIORU] *Maksimum* zbioru A nazywamy największą liczbę tego zbioru (jeśli taka w zbiorze istnieje) i oznaczamy symbolem $maxA$.

■ Jeśli $a \in \mathbb{R}$ i $b \in \mathbb{R}$, i $a < b$, to $max(a, b] = b$. Jest $max\{\pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}\} = \pi$. Żaden ze zbiorów: (a, b), $(-\infty, b)$, $[b, +\infty)$, $\mathbb{N}_k$ i $\mathbb{Z}$ nie posiada maksimum.

Definicja 2-18 [KRES GÓRNY ZBIORU] *Kresem górnym* zbioru A nazywamy największą liczbę w tym zbiorze, lub – jeśli takiej nie ma – najmniejszą spośród liczb ograniczających ten zbiór od góry. Kres górny zbioru A oznaczamy $supA$ (czytamy: *supremum zbioru A*).

Definicja 2-19 [KRES DOLNY ZBIORU] Kresem dolnym zbioru A nazywamy najmniejszą liczbę w tym zbiorze lub – jeśli takiej nie ma – największą spośród liczb ograniczających ten zbiór od dołu. Kres dolny zbioru A oznaczamy $infA$ (czytamy: *infimum zbioru* A).

■ Każdy zbiór ograniczony ma oba kresy. Jeśli $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$, to $inf(a,b) = a$ i $sup(a,b) = b$.

Zbiór A, który nie jest ograniczony od góry, nie posiada kresu górnego. Piszemy wówczas $supA = \infty$. Zbiór A, który nie jest ograniczony od dołu, nie posiada kresu dolnego. Piszemy wówczas $infA = -\infty$.

2.16. Niech $A = \{x \in \mathbb{R} : [(x = \frac{1}{n}) \wedge (n \in \mathbb{N}_1)]\}$. Czy jest to zbiór ograniczony? Czy istnieje $maxA$? Czy istnieje $minA$? Znajdź $infA$ oraz $supA$.

2.17. Niech $B = \{x \in \mathbb{R} : [(x = \frac{n+1}{n^2+1}) \wedge (n \in \mathbb{N})]\}$. Czy ten zbiór B posiada swoje kresy? Czy istnieje $minB$? Czy istnieje $maxB$?

2.18. Rozstrzygnij, które z poniższych zbiorów są ograniczone od dołu, które od góry, a które są ograniczone:
a) $A = \{x : (n \in \mathbb{N}_1) \wedge (x = \frac{1}{n} + n)\}$,
b) $B = \{x : (x \in \mathbb{R}) \wedge (sinx > 0)\}$,
c) $C = \{x : (x = \frac{n}{m}) \wedge (n \in \mathbb{N}_1) \wedge (m \in \mathbb{N}_1) \wedge (n < m)\}$,
d) $D = \{x : (x \in \mathbb{R}) \wedge (x^2 + 3x - 8 < 0)\}$,
e) $E = \{x : [x = (-1)^n \cdot (1 - \frac{1}{n}) \wedge (n \in \mathbb{N}_1)]\}$.
f) $F = \{x : [(x = 1 + \frac{1}{2^n}) \wedge (n \in \mathbb{N})]\}$.
Które z tych zbiorów posiadają minimum, które maksimum? Który z tych zbiorów ma kres dolny, który ma kres górny?

2.19. Udowodnij, że są ograniczone następujące zbiory liczbowe:

$$A = \{y : [\exists x \in \mathbb{R} : (y = \frac{|x|}{x^2+1})]\}, \qquad B = \{y : [\exists x \in \mathbb{R} : (y = \frac{|x|}{1+|x|})]\}.$$

2.7. Rodzina wszystkich podzbiorów zbioru

Definicja 2-20 Jeżeli A jest zbiorem, to symbolem 2^A oznaczamy zbiór wszystkich podzbiorów zbioru A. Zbiór 2^A nazywamy *rodziną wszystkich podzbiorów zbioru* A.

Niech $A = \{\bigstar, \bigcirc, \triangle\}$. Rodzina wszystkich podzbiorów zbioru tego A jest następującym zbiorem:

$$2^A = \{\emptyset, \{\bigstar\}, \{\bigcirc\}, \{\triangle\}, \{\bigstar, \bigcirc\}, \{\bigstar, \triangle\}, \{\bigcirc, \triangle\}, \{\bigstar, \bigcirc, \triangle\}\}.$$

2.20. Określ zbiór wszystkich podzbiorów zbioru $A = \{\{1,2\}, 2\}$.

2.21. Niech $B = \{a, \{a\}, \emptyset\}$. Określ zbiór 2^B.

2.22. Dla każdego z poniższych zbiorów podaj wszystkie jego elementy:
$A = \{1, \{1,2\}, 2\}$, $B = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, $C = \{a, \{b, \{c\}\}, d\}$, $D = \emptyset$, $E = \{\emptyset\}$.
Określ zbiory 2^A, 2^B, 2^C, 2^D i 2^E.

Twierdzenie 2-2 *Jeżeli A jest zbiorem n-elementowym, to liczba wszystkich podzbiorów zbioru A jest równa 2^n.*

2.8. Iloczyn kartezjański zbiorów

Uporządkowaną parę o poprzedniku a i następniku b oznaczamy przez (a, b). Podstawową własnością pary jest następująca równoważność:

$$(a, b) = (c, d) \iff [(a = c) \wedge (b = d)].$$

Uwaga: $(1, 2) \neq (2, 1)$ i $(1, 2) \neq \{1, 2\}$ i $(1, 1) \neq \{1, 1\} = \{1\}$.

Definicja 2-21 [ILOCZYN KARTEZJAŃSKI ZBIORÓW] Niech A i B będą dowolnymi zbiorami. *Iloczynem*, albo *produktem kartezjańskim* zbiorów A i B nazywamy zbiór wszystkich par uporządkowanych o poprzedniku z A i następniku z B. Iloczyn kartezjański zbiorów A i B oznaczamy symbolem $A \times B$. Mamy więc:

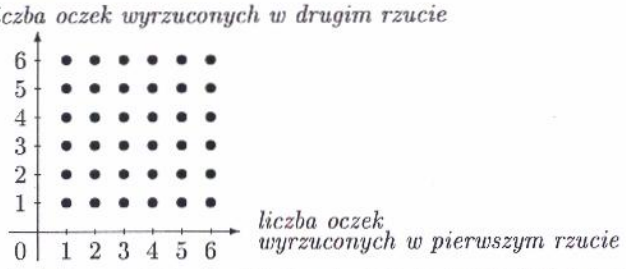
$$A \times B := \{(a, b) : (a \in A) \wedge (b \in B)\}.$$

Iloczyn kartezjański $A \times A$ nazywamy *kwadratem kartezjańskim* i oznaczamy A^2.

■ Jest np. $\{a\} \times \{a\} = \{(a, a)\}$, $\{a\} \times \{b\} = \{(a, b)\}$, $\{x\} \times \{a, b\} = \{(x, a), (x, b)\}$.

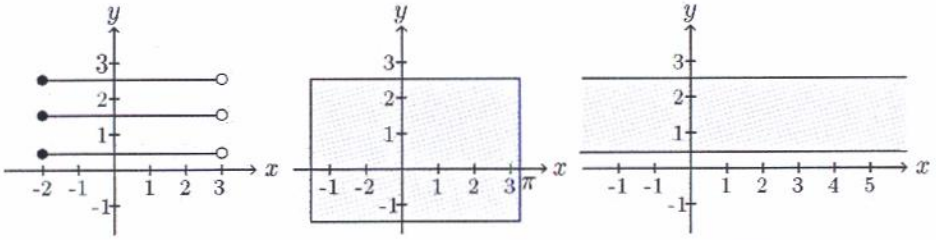
Iloczyn kartezjański $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, tj. zbiór $\mathbb{R}^2$, jest zbiorem par liczb rzeczywistych. Liczbę rzeczywistą interpretujemy jako punkt na osi liczbowej. Płaszczyznę, na której został wprowadzony kartezjański prostokątny układ współrzędnych $0xy$, nazywamy *płaszczyzną kartezjańską*. Parę (x, y) liczb rzeczywistych interpretujemy jako punkt na płaszczyźnie kartezjańskiej. W tej interpretacji zbiór $\mathbb{R}^2$ jest płaszczyzną kartezjańską.

■ Wynik dwukrotnego rzutu kostką jest parą liczb (x, y), gdzie x jest liczbą oczek wyrzuconych w pierwszym, a y – liczbą oczek wyrzuconych w drugim rzucie. Zbiór Ω wyników dwukrotnego rzutu kostką jest zbiorem $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, a więc kwadratem kartezjańskim $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$. Ten kwadrat kartezjański jest zbiorem pewnych punktów płaszczyzny kartezjańskiej (zob. rysunek 9).



Rys. 9 Zbiór wyników dwukrotnego rzutu kostką jako kwadrat kartezjański $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$

■ Niech $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}$. Oznacza to, że a, b, c i d są liczbami rzeczywistymi. Załóżmy, że $a < b$ i $c < d$. Zbiór $[a, b] \times [c, d]$ jest na płaszczyźnie zbiorem punktów pewnego prostokąta. Zbiór $(0, 1) \times (0, 1)$ jest wnętrzem pewnego kwadratu.

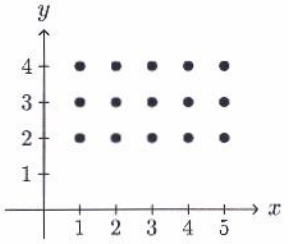


Rys. 10 Trzy iloczyny kartezjańskie pewnych zbiorów liczbowych

■ Na rys. 10 zaprezentowano trzy iloczyny kartezjańskie:
$[-2,3) \times \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\}$ (rys. *a*), $(-\frac{5}{2}, \pi) \times (-\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ (rys. *b*) i $(-\infty, +\infty) \times (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ (rys. *c*).

2.23. Określ zbiór $A \times B$, jeśli:
a) $A = \{1,2,3,4,5\}$ i $B = \{2,3,4\}$,
b) $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ i $B = \{\emptyset\}$.

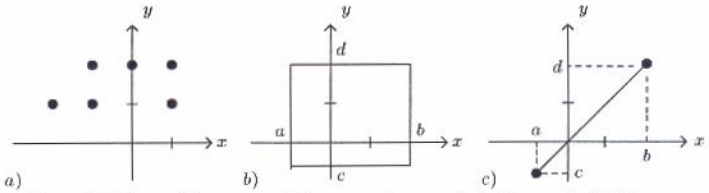
■ Zauważ, że zbiór wyników dwukrotnego rzutu kostką (rysunek 9) można traktować jako kwadrat kartezjański zbioru $\{1,2,3,4,5,6\}$, a więc zbioru wyników rzutu kostką.



Rys. 11 Iloczyn kartezjański $\{1,2,3,4,5\} \times \{2,3,4\}$ jako zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej

■ Jeżeli $\Omega = \{o, r\}$, to $\Omega \times \Omega = \Omega^2 = \{(oo), (or), (r,o), (rr)\}$.

2.24. Punkt płaszczyzny kartezjańskiej utożsamiamy z parą liczb (jest to para jego współrzędnych). Rozważmy trzy zbiory punktów:
A – zbiór sześciu punktów przedstawionych na rysunku 12*a*),
B – zbiór punktów odcinków tworzących prostokąt na rysunku 12*b*),
C – odcinek, którego końcami są punkty: (a,c) i (b,d) na rys. 12*c*) wraz z tymi punktami.
Dla każdego z tych zbiorów rozstrzygnij, czy jest on iloczynem kartezjańskim pewnych zbiorów liczbowych? Odpowiedź uzasadnij.



Rys. 12 Trzy zbiory punktów na płaszczyźnie kartezjańskiej

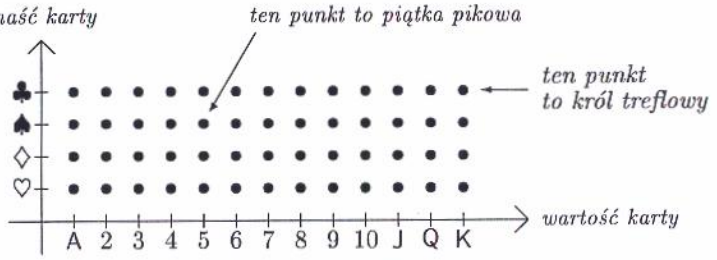
2.25. Przedstaw jako zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej następujące zbiory:
$A = (-1,2] \times (-1,1)$,
$B = (-\infty, a) \times (-\infty, b)$, gdzie $a \in \mathbb{R}$ i $b \in \mathbb{R}$,
$C = (\sqrt{2}, \pi) \times (-\infty, +\infty)$,
$D = (-\infty, 7] \times \{1, \sqrt{13}\}$.
$E = \{1,2\} \times (1,2)$.

Twierdzenie 2-3 *Dla dowolnych zbiorów niepustych A, B i C zachodzą równości:*

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C),$$
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C),$$
$$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C).$$

2.26. Niech $A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 < 1\}$, $B = \{0, 1\}$ i $C = \{x \in \mathbb{Z} : \sqrt{x} \leqslant 1\}$. Określ zbiory $A \times B$, $B \times A$, $B \times C$ i $C \times B$.

■ Każda karta do gry w bridża ma dwie cechy: wartość[3] i maść, które jednoznacznie określają tę kartę. Każdą kartę można więc zakodować za pomocą pary jej cech. Niech $A = \{\mathsf{A}, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \mathsf{W}, \mathsf{D}, \mathsf{K}\}$ i $B = \{\clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \heartsuit\}$. Zbiór A traktujmy jako zbiór wartości kart talii bridżowej, zbiór B jest zbiorem maści tych kart. Zbiór $A \times B$ możemy interpretować jako zbiór kodów (oznaczeń) 52 kart talii bridżowej. Rysunek 13 przedstawia talię kart jako zbiór pewnych punktów płaszczyzny kartezjańskiej.



Rys. 13 Talia kart jako iloczyn kartezjański dwu zbiorów w układzie współrzędnych

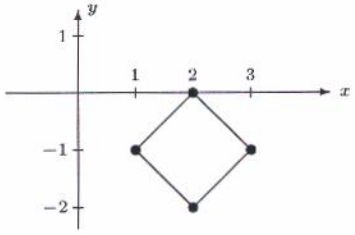
2.27. Przedstaw na płaszczyźnie kartezjańskiej zbiór $\mathbb{N} \times \{1, 2, 3\}$.

2.28. Określ zbiór $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ i przedstaw go jako podzbiór płaszczyzny kartezjańskiej.

2.29. Określ zbiory $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ i $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$. Przedstaw na płaszczyźnie kartezjańskiej zbiór $\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$. Ten zbiór nazywamy w matematyce *kratą całkowito-liczbową*.

2.30. Dziedziną funkcji zdaniowej $|x - 2| + |y + 1| = 1$ (w matematyce nazywa się ją równaniem o dwóch niewiadomych) jest płaszczyzna kartezjańska $\mathbb{R}^2$. Przedstaw na płaszczyźnie kartezjańskiej zbiór punktów, których współrzędne spełniają tę funkcję zdaniową. Czy ten zbiór jest produktem kartezjańskim dwóch zbiorów? Dlaczego?

□ Współrzędne każdego punktu brzegu kwadratu z rysunku 14 spełniają funkcję zdaniową $|x - 2| + |y + 1| = 1$. I tylko te punkty mają ową własność.



Rys. 14 Zbiór punktów na płaszczyźnie kartezjańskiej jako rozwiązanie równania $|x - 2| + |y + 1| = 1$

2.31. Wykaż, że zbiór $\{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge |x - 2| < 1 \wedge |y| \leqslant 3\}$ jest iloczynem kartezjańskim dwóch zbiorów liczbowych. Określ te zbiory.

[3] Przyjmuje się na ogół, że as ma wartość 1, walet 11, dama 12 i król 13.

3. Relacje

3.1. Relacja ze zbioru w zbiór – relacja w zbiorze

Definicja 3-1 [RELACJA ZE ZBIORU W ZBIÓR] Niech A i B będą dowolnymi zbiorami niepustymi. Każdy niepusty podzbiór R iloczynu kartezjańskiego $A \times B$ nazywamy *relacją ze zbioru A w zbiór B*. Jeśli R jest podzbiorem kwadratu kartezjańskiego $A \times A$, to mówimy, że R jest *relacją w zbiorze A*. Zamiast $(a, b) \in R$ piszemy aRb i czytamy *„a jest w relacji R z b"*.

■ Niech A oznacza zbiór miast w Polsce, B zaś zbiór rzek, które przepływają przez Polskę. Wyrażenie: *„x jest miastem leżącym nad rzeką y"* jest funkcją zdaniową dwu zmiennych. Zbiór tych par (x, y), które ją spełniają, jest pewnym podzbiorem iloczynu kartezjańskiego $A \times B$, a więc jest pewną relacją R_1. Jest np.:

$$(\textit{Nowy Sącz})R_1(\textit{Dunajec}),\ (\textit{Kraków})R_1(\textit{Wisła}),\ (\textit{Kraków})R_1(\textit{Białucha}).$$

Jest również $(\textit{Poznań})R_1(\textit{Warta})$, a zatem para $(\textit{Poznań}, \textit{Warta})$ należy do relacji R_1, ale $\sim[(\textit{Nowy Sącz})R_1(\textit{Wisła})]$. Para $(\textit{Nowy Sącz}, \textit{Wisła})$ nie należy do relacji R_1.

■ Niech A oznacza zbiór kobiet, B zaś zbiór ludzi mieszkających aktualnie w Polsce. Jeśli xR_2y oznacza, że *osoba x jest matką osoby y*, to R_2 jest relacją ze zbioru A w zbiór B (jest relacją w iloczynie kartezjańskim $A \times B$). Mamy np.

$(\textit{Krystyna Loska}, \textit{Grażyna Torbicka}) \in R_2$, $(\textit{Krystyna Janda}, \textit{Maria Seweryn}) \in R_2$.

■ Niech A będzie zbiorem prostych na płaszczyźnie. Symbolem $x \perp y$ oznaczmy funkcję zdaniową dwu zmiennych: *„prosta x jest prostopadła do prostej y"*. Zbiór $R_3 = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in A \wedge x \perp y\}$ jest podzbiorem kwadratu kartezjańskiego $A \times A$, jest więc relacją R_3. Mamy tu $xR_3y \iff x \perp y$.

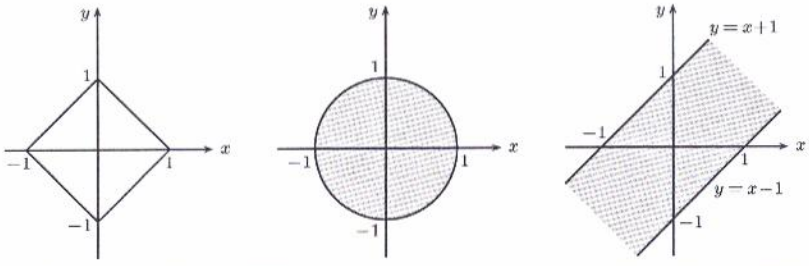
■ Niech $R_4 \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ i $xR_4y \iff$ (*różnica $x - y$ jest podzielna przez 3*). Jest tu $16R_410$, czyli $(16, 10) \in R_4$. Jest również $27R_49$, czyli $(27, 9) \in R_4$.

Zbiór $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ interpretujemy jako płaszczyznę kartezjańską, tj. płaszczyznę z układem współrzędnych. Para liczb (x, y) jest w tej interpretacji parą współrzędnych punktu tej płaszczyzny. Jeśli relacja R jest podzbiorem iloczynu kartezjańskiego $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, to relacja ta (jako zbiór par liczb rzeczywistych) jest zbiorem pewnych punktów na płaszczyźnie kartezjańskiej.

■ Dane są trzy relacje w zbiorze $\mathbb{R}$: R_1, R_2 i R_3, gdzie:

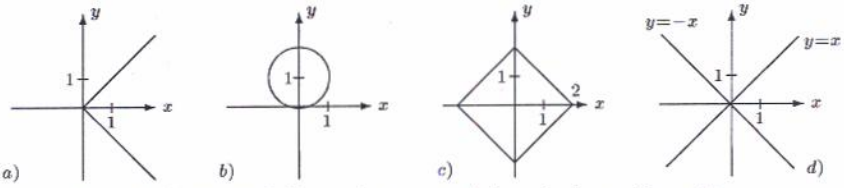
$$(xR_1y) \iff (|x| + |y| = 1), \quad (xR_2y) \iff (x^2 + y^2 \leqslant 1), \quad (xR_1y) \iff (|x - y| < 1).$$

Na rysunku 15 przedstawiono każdą z tych relacji jako podzbiór płaszczyzny kartezjańskiej.



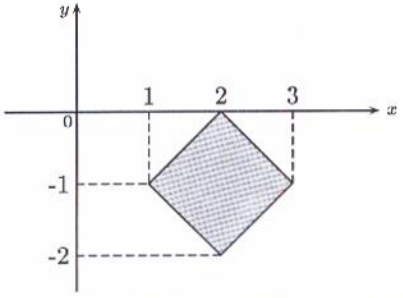
Rys. 15 Relacje R_1, R_2 i R_3 w zbiorze $\mathbb{R}$ jako zbiory punktów płaszczyzny kartezjańskiej

3.1. Na rysunku 16 przedstawiono cztery zbiory punktów na płaszczyźnie kartezjańskiej. Każdy z tych podzbiorów jest pewną ralacją w zbiorze $\mathbb{R}$. Określ każdą z tych relacji.



Rys. 16 Cztery podzbiory płaszczyzny jako relacje w zbiorze $\mathbb{R}$

3.2. Zaciemniony obszar na rysunku 17 jest wnętrzem kwadratu. Jako podzbiór zbioru $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ jest on relacją w zbiorze $\mathbb{R}$. Określ tę relację. Co ma z tym zadaniem wspólnego rysunek 14 na s. 30 i zadanie 2.30?



Rys. 17 Wnętrze kwadratu jako relacja w zbiorze $\mathbb{R}$

Dalej mamy na uwadze relacje $R \subset A \times A$, tj. relacje w zbiorze A.

Definicja 3-2 Relację $R \subset A \times A$ nazywamy

- *zwrotną*, gdy $\forall x \in A : [xRx]$,
- *przeciwzwrotną*, gdy $\forall x \in A : [\sim (xRx)]$,
- *symetryczną*, gdy $\forall x, y \in A : [xRy \Longrightarrow yRx]$,
- *przeciwsymetryczną*, gdy $\forall x, y \in A : [(xRy) \Longrightarrow \sim (yRx)]$,
- *antysymetryczną*, gdy $\forall x, y \in A[(xRy \wedge yRx) \Longrightarrow (x = y)]$,
- *przechodnią*, gdy $\forall x, y, z \in A; [(xRy \wedge yRz) \Longrightarrow (xRz)$,
- *spójną*, gdy $\forall x, y \in A : [xRy \vee yRx \vee x = y]$,
- *porządkującą*, gdy relacja R jest przechodnia i dla każdych x i y ze zbioru A zachodzi dokładnie jeden z trzech warunków: xRy albo yRx, albo $x = y$.

3.3. Wykaż, że określona na s. 31 relacja $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (|x - y| < 1)\}$ jest zwrotna oraz symetryczna i że nie jest ani przechodnia, ani spójna.

□ Relacja R_3 jest zwrotna, ponieważ $\forall x \in \mathbb{R}\ [\ |x - x| = 0 < 1\ ]$. Zauważ, że

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ [\ |x - y| = |y - x|\ ],$$

czyli

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ [\ (|x - y| < 1) \Longrightarrow (|y - x| < 1)\ ],$$

a to oznacza, że relacja R_3 jest symetryczna.

Niech $x = 0$, $y = \frac{2}{3}$ i $z = \frac{4}{3}$. Mamy wówczas

$$|x-y| = |0-\tfrac{2}{3}| < 1,\ |y-z| = |\tfrac{2}{3}-\tfrac{4}{3}| = |-\tfrac{2}{3}| < 1,\ |x-z| = |0-\tfrac{4}{3}| = |-\tfrac{4}{3}| = \tfrac{4}{3} > 1,$$

czyli

$$|x-y| < 1 \quad \text{i} \quad |y-z| < 1 \quad \text{i} \quad |x-z| > 1,$$

a to dowodzi, że relacja R_3 nie jest przechodnia.

3.4. Niech $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ i $(xRy) \iff (x < y)$. Zbadaj własności tej relacji. Czy jest to relacja porządkująca?

3.5. Zbadaj własności następujących relacji R w zbiorze $\mathcal{F}$ wszystkich figur na płaszczyźnie:
a) $(aRb) \iff$ (figura b jest obrazem figury a w pewnej jednokładności),
b) $(aRb) \iff$ (figura b jest obrazem figury a w symetrii osiowej),
c) $(aRb) \iff$ (figury a i b są przystające),
d) $(aRb) \iff$ (figury a i b mają równe pola).

3.6. Niech U będzie niepustym zbiorem. W zbiorze 2^U wszystkich podzbiorów zbioru U określono relację R następująco: $ARB \iff (A \cap B \neq \emptyset)$. Zbadaj jej własności.

3.7. Zbadaj własności następujących relacji:
a) $R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = |y|\}$,
b) $R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-y| = 1\}$,
c) $R_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y = 1\}$,
d) $R_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < |y|\}$,
e) $R_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\}$,
f) $R_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$.
Każda z tych relacji (jako zbiór par liczb rzeczywistych) jest podzbiorem płaszczyzny kartezjańskiej. Przedstaw w tym geometrycznym ujęciu relacje R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 i R_6.

3.2. Graf relacji i tabela jako forma prezentacji relacji

Niech $A = \{a,b,c\}$, $B = \{\clubsuit, \spadesuit, \diamondsuit, \heartsuit\}$ i $R = \{(a,\heartsuit),(a,\spadesuit),(b,\heartsuit),(c,\clubsuit),(c,\diamondsuit),(c,\spadesuit)\}$. Zbiór R jako podzbiór iloczynu kartezjańskiego $A \times B$ jest relacją R. Tę relację przedstawiono w tabeli na rysunku 18.

	$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$
a			×	×
b			×	
c	×	×		×

Rys. 18 Tabela jako prezentacja relacji R ze zbioru $\{a,b,c\}$ w zbiór $\{\clubsuit, \spadesuit, \diamondsuit, \heartsuit\}$

Każdy wiersz reprezentuje element zbioru A, każda kolumna – element zbioru B. Jeśli w przecięciu się wiersza odpowiadającego elementowi x i kolumny odpowiadającej elementowi y znajduje się znak ×, to znaczy, że xRy, albo że $(x,y) \in R$.

3.8. Niech $A = \{a,b,c,d\}$. Tabela na rysunku 19 prezentuje pewną relację R w zbiorze A. Przedstaw tę relację jako podzbiór kwadratu kartezjańskiego $\{a,b,c,d\} \times \{a,b,c,d\}$.

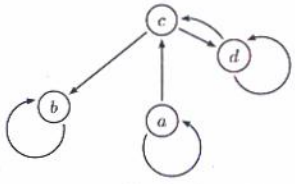
	a	b	c	d
a	×		×	
b		×		
c		×		×
d			×	×

Rys. 19 Tabela jako prezentacja relacji R w zbiorze $\{b, c, d\}$

3.9. Niech A będzie zbiorem s-elementowym a R relacją w tym zbiorze. Jej prezentacją jest tabela, która (nie licząc pierwszego wiersza i pierwszej kolumny, w których są rozmieszczone elementy zbioru A) ma s^2 oczek. Postawiony w oczku krzyżyk określa parę, która należy do relacji R. Jak z układu krzyżyków odczytywać, czy relacja R jest zwrotna? Jaką własność ma ten układ jeśli relacja jest symetryczna? Co wyróżnia tabelę relacji przeciwzwrotnej?

[GRAF RELACJI W ZBIORZE] Niech A będzie zbiorem skończonym a R relacją w tym zbiorze ($R \subset A \times A$). Każdy element zbioru A przedstawmy jako punkt płaszczyzny euklidesowej. Te punkty nazywamy *wierzchołkami*. Jeśli $a \in A$ i $b \in A$ i aRb, to punkt a połączmy z punktem b zorientowanym odcinkiem prostej lub krzywej. Taki odcinek nazywamy *krawędzią*. Punkt a jest początkiem, a punkt b – końcem tej krawędzi. Jeśli aRa, to krawędź łączącą węzeł a z nim samym, nazywamy *pętlą*. W ten sposób na płaszczyźnie powstał *graf zorientowany* jako pewna prezentacja relacji R. Nazywamy go *grafem relacji* R.

■ Relację R w zbiorze $A = \{a, b, c, d\}$, o której mowa w zadaniu 3.8, przedstawiono za pomocą grafu na rysunku 20

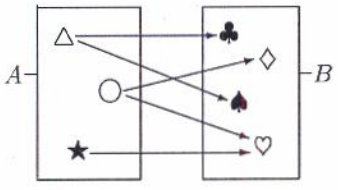


Rys. 20 Graf relacji R

Opisane sposoby prezentacji relacji R (za pomocą tabeli lub grafu) można uogólnić na relacje w iloczynie kartezjańskim dowolnych dwu zbiorów skończonych A i B, a więc relacje z dowolnego skończonego zbioru A w inny skończony zbiór B.

3.10. Niech $A = \{\bigstar, \triangle, \bigcirc\}$ i $B = \{\clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \heartsuit\}$. Przedstaw w formie tabeli relację $R = \{(\bigstar, \heartsuit), (\bigcirc, \diamondsuit), (\bigcirc, \heartsuit), (\triangle, \spadesuit), (\triangle, \clubsuit)\}$ ze zbioru A w zbiór B.

□ Graf relacji R, o której mowa w zadaniu 3.10, prezentuje rysunek 21.



Rys. 21 Graf relacji $R = \{(\bigstar, \heartsuit), (\bigcirc, \diamondsuit), (\bigcirc, \heartsuit), (\triangle, \spadesuit), (\triangle, \clubsuit)\}$

3.3. Relacja równoważnościowa

Definicja 3-3 [RELACJA RÓWNOWAŻNOŚCIOWA] Relację $R \subset A \times A$ nazywamy *relacją równoważnościową* albo *relacją równoważności*, jeśli jest zwrotna, symetryczna i przechodnia. Relację równoważności oznaczamy symbolem $\approx$. Zapis $a \approx b$ czytamy *„a jest równoważne z b"*.

■ Relacja $R^* \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, gdzie $(m,n) \in R^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba naturalna m ma tyle samo cyfr co liczba n, jest relacją równoważnościową.

Definicja 3-4 [KLASA ABSTRAKCJI] Niech R będzie relacją równoważnościową w zbiorze A. Zbiór $[a] := \{b \in A : aRb\}$ nazywamy *klasą abstrakcji elementu a względem relacji R*. Jeśli $b \in [a]$, to b nazywamy *reprezentantem* klasy $[a]$.

■ W przypadku powyższej relacji R^* mamy np.: $[7] = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ oraz $[7] = [9]$ i $[7] = [1]$. Jest $[1234] = [4321] = [9999]$, $[12345] \cap [1234] = \emptyset$.

Definicja 3-5 [ZBIÓR ILORAZOWY] Jeśli R jest relacją równoważnościową w zbiorze A, to zbiór

$$A/R := \{[x] : x \in A\},$$

tj. zbiór wszystkich klas abstrakcji, nazywamy *zbiorem ilorazowym* zbioru A względem relacji R.

3.11. Oznaczajmy wyniki pojedynczego rzutu monetą literami: o – `wypadnie orzeł`, r – `wypadnie reszka`. Wynik trzykrotnego rzutu monetą kodujmy ciągiem wyników kolejnych etapów. Zapis ror oznacza zatem wynik: `w pierwszym rzucie wypadnie reszka, w drugim orzeł i w trzecim reszka`. Jeśli Ω jest zbiorem wyników tego doświadczenia losowego, to $\Omega = \{ooo, oor, oro, orr, roo, ror, rro, rrr\}$. Niech $l_r(\omega)$ oznacza liczbę wyrzuconych reszek w wyniku ω. Tak więc np. $l_r(ooo) = 0$, $l_r(oro) = 1$ itd. Niech $\omega_1 R \omega_2$ oznacza, że $l_r(\omega_1) = l_r(\omega_2)$. Narysuj graf relacji R. Wykaż, że relacja R jest zwrotna, symetryczna i przechodnia. Określ $[oor]$, $[orr]$ oraz zbiór ilorazowy Ω/R.

□ Zauważ, że

$$[ooo] = \{ooo\},\ [oor] = \{oor, oro, roo\},\ [oro] = \{oor, oro, roo\},\ [roo] = \{oor, oro, roo\},$$

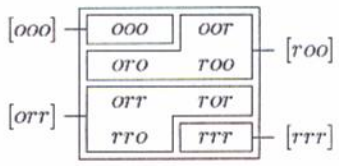
a zatem $[oor] = [oro] = [roo]$. Zwróć uwagę na to, że $oorRoro$ i $oorRroo$ i $oroRroo$.

Analogicznie jest

$$[rro] = \{rro, ror, orr\},\ [ror] = \{rro, ror, orr\} \text{ i } [orr] = \{rro, ror, orr\},$$

a zatem $[rro] = [ror] = [orr]$, $[rrr] = \{rrr\}$. Zauważ, że $rroRror$ i $rorRorr$ i $rroRorr$.

Mamy zatem cztery klasy abstrakcji: $\{ooo\}$, $\{oor, oro, roo\}$, $\{rro, ror, orr\}$ i $\{rrr\}$. Są one podzbiorami zbioru Ω. Przedstawiono je na rysunku 22. Te podzbiory są parami rozłączne a ich suma mnogościowa jest zbiorem Ω.



Rys. 22 Klasy abstrakcji względem relacji R w zbiorze wyników trzykrotnego rzutu monetą

3.12. Każdemu wynikowi dwukrotnego rzutu kostką przypiszmy liczbę łącznie wyrzuconych oczek. Niech Ω będzie zbiorem wyników dwukrotnego rzutu kostką (por. rysunek 9 na s. 28). Relacja R jest określona w zbiorze Ω następująco: dwa wyniki dwukrotnego rzutu kostką pozostają w relacji R, jeśli przypisane im liczby łącznie wyrzuconych oczek są równe. Wykaż, że ta relacja jest równoważnościowa. Znajdź klasy abstrakcji: [34], [66], [12]. Określ zbiór ilorazowy Ω/R.

3.13. Niech R będzie relacją równoważnościową w zbiorze A. Udowodnij, że:
a) jeżeli $a \in A$ i $b \in A$ i $(a,b) \in R$, to $[a] = [b]$;
b) jeżeli $a \in A$ i $b \in A$ i $(a,b) \notin R$, to $[a] \cap [b] = \emptyset$.

Klasy abstrakcji elementów, które pozostają w relacji równoważnościowej R, są zbiorami identycznymi. Klasy abstrakcji elementów, które nie pozostają w relacji równoważnościowej R, są zbiorami rozłącznymi.

Z rozwiązania zadania 3.13 wynika, że relacja równoważnościowa R w zbiorze A generuje klasyfikację tego zbioru, tj. jego rozbicie na podzbiory parami rozłączne i takie, że ich suma mnogościowa jest zbiorem A (por. rysunek 22).

3.14. W zbiorze T wszystkich 52 kart do bridża wprowadźmy relację R następująco:
$$aRb \iff \text{(karty } a \text{ i } b \text{ są tej samej maści)}.$$
Wykaż, że jest to relacja równoważnościowa. Określ zbiór ilorazowy T/R.

3.15. Niech A oznacza zbiór mieszkańców Nowego Sącza. Niech xRy oznacza, że mieszkaniec x obchodzi urodziny w tym samym dniu co mieszkaniec y. Wykaż, że ta relacja R jest równoważnościowa w zbiorze A. Relacja ta klasyfikuje zbiór mieszkańców Nowego Sącza na 366 parami rozłącznych zbiorów. Te zbiory są klasami abstrakcji. Opisz je, a więc określ zbiór ilorazowy zbioru A względem tej relacji R. Jan Nowak obchodzi urodziny 13 maja i mieszka w Nowym Sączu (a więc jest elementem zbioru A). Określ klasę abstrakcji tego „Jana Nowaka" względem relacji R. Maria K. jest także mieszkańcem Nowego Sącza, ale obchodzi urodziny 14 maja. Czy Maria K. należy do klasy abstrakcji, o której mowa? Ile jest klas abstrakcji?

3.16. W zbiorze $\mathbb{Z}$ liczb całkowitych określmy dwie relacje R_1 i R_2 następująco:
a) $(mR_1n) \iff (|m+n| \textit{ jest liczbą parzystą})$.
b) $(mR_2n) \iff (\textit{różnica } m-n \textit{ jest podzielna przez } 3)$.
Udowodnij, że każda z tak określonych relacji jest równoważnościowa. Znajdź klasy abstrakcji. Określ zbiór ilorazowy.

□ W przypadku relacji R_1 mamy dwie klasy abstrakcji. Są nimi zbiory:
$A = \{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$ i
$B = \{\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$.
□ W przypadku relacji R_2 są trzy klasy abstrakcji: $[0]$, $[1]$ i $[2]$. Zauważ, że:
$[0] = [-3] = [6] = \ldots$,
$[1] = [-2] = [4] = \ldots$,
$[2] = [-1] = [5] = \ldots$.
Zachodzi także równość $\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup [2]$.

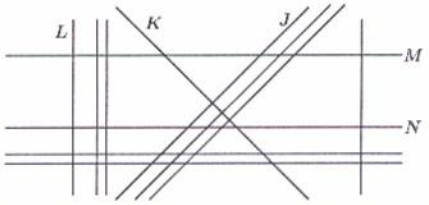
3.17. Niech $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ i $(xRy) \iff (|x| = |y|)$. Wykaż, że R jest relacją równoważnościową.

3.18. Wykaż, że relacja $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - y| = 1 \vee x = y\}$, jest relacją równoważnościową. Wyznacz klasy abstrakcji tej relacji R.

3.4. Relacja równoważnościowa a definiowanie pojęć

3.19. Niech A oznacza zbiór wszystkich prostych na płaszczyźnie. Symbolem $L||M$ oznaczmy funkcję zdaniową dwu zmiennych: *„prosta L jest równoległa do prostej M lub proste L i M się pokrywają"*. Niech $(LRM) \iff (L||M)$. Wykaż, że relacja R jest równoważnością. Czym są tu klasy abstrakcji? Określ zbiór ilorazowy.

Definicja 3-6 [KIERUNEK NA PŁASZCZYŹNIE] Każdą klasę abstrakcji względem opisanej w zadaniu 3.19 relacji R w zbiorze prostych na płaszczyźnie, nazywamy *kierunkiem na płaszczyźnie*. *Kierunkiem prostej* L nazywamy zbiór złożony z prostej L i wszystkich prostych do niej równoległych.

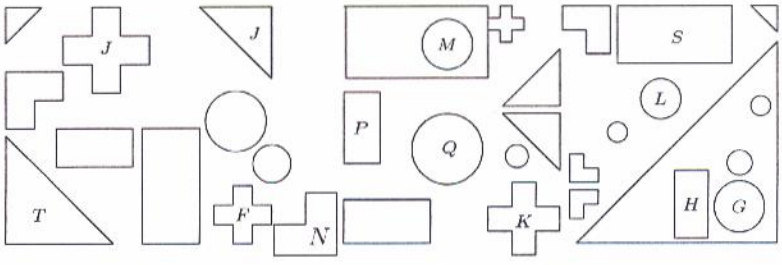


Rys. 23 Pęki prostych równoległych jako kierunki na płaszczyźnie

3.20. Na rysunku 23 zaprezentowano kilkanaście prostych. Wskaż proste pozostające w relacji R do prostej J. Które z poniższych zdań są prawdziwe:
$(L, M) \in R$, $(L, K) \in R$, $(M, L) \in R$, $(M, N) \in R$, $\sim [(J, K) \in R]$, $K \in [M]$, $N \in [M]$.
Narysuj kilka prostych należących do zbioru $[K]$. Wskaż kilka prostych ze zbioru $[M]$.

3.21. Na płaszczyźnie euklidesowej ustalamy punkt o. Niech x i y oznaczają punkty na tej płaszczyźnie. Niech $xRy \iff |ox| = |oy|$, gdzie $|ox|$ oznacza odległość punktu x od punktu o. Wykaż, że ta relacja R jest zwrotna, symetryczna i przechodnia. Wyznacz klasy abstrakcji tej relacji R.

3.22. Niech A oznacza zbiór wszystkich figur na płaszczyźnie. Mówimy, że dwie figury F i G są *podobne*, jeśli jedna z nich jest obrazem drugiej w pewnym podobieństwie. Niech xRy oznacza, że figury x i y są podobne. Wykaż, że R jest relacją równoważnościową.

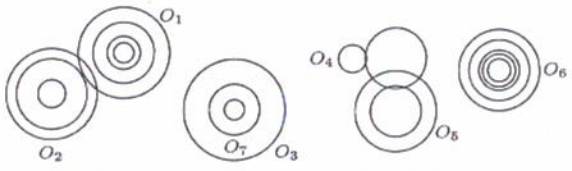


Rys. 24 Figury na płaszczyźnie euklidesowej

3.23. Figura T na rysunku 24 jest trójkątem prostokątnym i równoramiennym, figura L jest kołem. Figura H jest prostokątem, którego sąsiednie boki mają długości x i $2x$. Niech R oznacza relację, o której mowa w zadaniu 3.22. Określ klasy abstrakcji $[T]$, $[Q]$, $[H]$, $[J]$, $[N]$. Wskaż na tym rysunku reprezentantów każdej z klas. Rozważmy zdania: $F \in [J]$, $M \in [Q]$, $H \in [S]$, $(J,F) \in R$, $(S,H) \in R$, $(F,N) \in R$, $(T,F) \in R$, $(F,K) \in R$, $(J,K) \in R$, $(P,N) \in R$. Które z tych zdań są prawdziwe?

Definicja 3-7 [KSZTAŁT FIGURY] Klasę abstrakcji figury F względem relacji R, określonej w zadaniu 3.22, a więc zbiór wszystkich figur podobnych do figury F, nazywamy *kształtem figury* F.

3.24. W zbiorze okręgów na płaszczyźnie euklidesowej wprowadźmy relację R. Para okręgów (X,Y) należy do relacji R (okręgi X i Y pozostają w relacji R) jeśli mają wspólny środek (czyli gdy są współśrodkowe). Dla każdego okręgu O_j na rysunku 25 (gdzie $j = 1,2,3,4,5,6,7$) wskaż klasę abstrakcji. Czy $(O_1,O_2) \in R$? Czy $(O_3,O_7) \in R$?



Rys. 25 Zbiór okręgów na płaszczyźnie euklidesowej

3.25. W zbiorze $A = \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_1$ określona jest relacja R następująco:

$$(x,y)R(u,v) \iff x+v = y+u \quad \text{dla} \quad x,y,u,v \in \mathbb{N}_1 .$$

Wykaż, że R jest relacją równoważnościową. Znajdź klasy abstrakcji dla każdego z następujących elementów zbioru A: $(2,4)$, $(4,6)$, $(4,2)$, $(4,4)$. Rozstrzygnij, czy są prawdziwe zdania: $(2,4)R(4,6)$, $(2,4)R(4,2)$, $(4,6)R(13,15)$, $(2,15) \in [(1,14)]$.

Definicja 3-8 [LICZBA CAŁKOWITA] Klasę abstrakcji dla elementu (x,y) względem relacji R opisanej w zadaniu 3.25, nazywamy *liczbą całkowitą*.

Klasa abstrakcji dla elementu $(2,4)$ jest zbiorem par liczb naturalnych, który w arytmetyce nazywa się liczbą całkowitą (-2), czyli $-2 = [(2,4)] = [(3,5)] = [(17,19)]$. Klasa abstrakcji $[(4,4)]$ jest liczbą całkowitą 0. Liczbą całkowitą (-13) nazywa się w arytmetyce zbiór wszystkich par liczb naturalnych, które pozostają w relacji R np. z parą $(1,14)$. Klasa abstrakcji $[(14,1)]$ jest liczbą całkowitą 13 (nie należy zatem liczby całkowitej 13 mylić z liczbą naturalną 13).

Ostatnie przykłady ujawniają, jak dzięki relacji równoważnościowej w zbiorze i dzięki klasie abstrakcji definiuje się w matematyce takie pojęcia, jak: kierunek na płaszczyźnie, kształt figury, liczba całkowita.

3.26. Niech D będzie zbiorem 28 kamieni klasycznego domina. Dwa kamienie pozostają w relacji R wtedy i tylko wtedy, gdy mają jednakowe sumy liczb oczek. Wykaż, że R jest relacją jest równoważnościową. Określ zbiór ilorazowy D/R i przedstaw go za pomocą diagramów Venna.

4. Funkcja

4.1. Funkcja jako szczególna relacja

Definicja 4-1 [FUNKCJA JAKO RELACJA] Niech X i Y będą dowolnymi zbiorami niepustymi. Relację $f \subset X \times Y$ nazywamy *funkcją ze zbioru X w zbiór Y*, jeśli:

$\forall x \in X\ \exists y \in Y : [(x,y) \in f]$,

$\forall x \in X\ \forall y_1 \in Y\ \forall y_2 \in Y : \{[(x,y_1) \in f] \wedge [(x,y_2) \in f] \Longrightarrow (y_1 = y_2)\}$.

Zbiór X nazywamy *dziedziną* funkcji f, zbiór Y nazywamy *przeciwdziedziną* tej funkcji. Symbolem D_f oznaczamy dziedzinę funkcji f. Jeśli $(x,y) \in f$, to y nazywamy *wartością funkcji* f dla elementu x z dziedziny D_f i oznaczamy $y = f(x)$.

Zapis $f{:}X \longrightarrow Y$ czytamy: f jest funkcją ze zbioru X w zbiór Y. Zapis $f(x) = y$ oznacza, że $(x,y) \in f$. Funkcja $f{:}X \longrightarrow Y$ jest zbiorem par postaci $(x, f(x))$, gdzie $x \in X$.

4.1. Niech $X = \{a,b,c,d,e\}$ i $Y = \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$. Relacją w iloczynie kartezjańskim $X \times Y$ jest każdy z dwu następujących podzbiorów iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$:
$R_1 = \{(a,\clubsuit),(b,\spadesuit),(c,\spadesuit),(d,\heartsuit),(e,\clubsuit)\}$,
$R_2 = \{(a,\clubsuit),(a,\spadesuit),(c,\spadesuit),(d,\heartsuit),(e,\clubsuit)\}$.
Narysuj graf każdej z relacji R_1 i R_2. Wykaż, że relacja R_1 jest funkcją. Oznaczmy ją przez f. Znajdź $f(a)$ i $f(b)$. Wykaż, że relacja R_2 nie jest funkcją.

4.2. Niech X będzie zbiorem ludzi. W tym zbiorze X określone są relacje:
R_1, gdzie xR_1y oznacza, że *„osoba x jest ojcem osoby y"*,
R_2, gdzie xR_2y oznacza, że *„osoba x jest synem osoby y i osoba y jest mężczyzną"*.
R_3, gdzie xR_3y oznacza, że *„osoba y jest ojcem osoby x"*,
Która z tych relacji jest funkcją?

4.3. Niech X oznacza zbiór ludzi żyjących dziś w Polsce, Y zaś zbiór lat od 1900 do 2009. Relacje R_1 i R_2 określone są następująco:
xR_1y oznacza, że *y jest rokiem, w którym osoba x przyszła na świat*,
xR_2y oznacza, że *y jest osobą urodzoną w roku x*.
Czy te relacje są funkcjami? Odpowiedź uzasadnij.

4.4. Załóżmy, że X jest zbiorem państw, Y zaś – zbiorem miast. Czy jest funkcją relacja $R = \{(x,y) : \textit{miasto } y \textit{ jest stolicą państwa } x\}$?

4.5. Niech $A = \{\triangle, \bigcirc, \bigstar\}$ i $B = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$. Tabela na rysunku 26 prezentuje pewną relację. Czy ta relacja jest funkcją? Dlaczego?

	α	β	γ	δ
$\triangle$	×		×	
$\bigcirc$		×		
$\bigstar$				×

Rys. 26 Tabela relacji ze zbioru $\{\triangle, \bigcirc, \bigstar\}$ w zbior $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$

4.6. W myśl definicji 4-1 funkcja jest zbiorem par. Podzbiorem iloczynu kartezjańskiego $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ jest zbiór $\{(\pi,\pi),(\sqrt{2},\pi),(\frac{1}{2},\sqrt{2}),(\pi,\sqrt{2})\}$. Ten zbiór jest zatem relacją w zbiorze $\mathbb{R}$. Czy ta relacja jest funkcją? Czy jest funkcją zbiór par: $\{(\pi,\pi),(\sqrt{2},\pi),(\frac{1}{2},\sqrt{2})\}$?

4.7. Niech $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Przyjmijmy, że xRy wtedy i tylko wtedy, gdy $x^2 = y^2$. Rozstrzygnij, czy tak określona relacja R w zbiorze $\mathbb{R}$ jest funkcją.

4.2. Funkcja jako przyporządkowanie

Załóżmy, że X i Y są zbiorami skończonymi i $f{:}X \longrightarrow Y$. Funkcja f jest relacją. Można zatem rozważać jej graf. Z definicji funkcji wynika, że na tym grafie od każdego elementu zbioru X wychodzi dokładnie jedna strzałka (krawędź) do pewnego elementu zbioru Y. Graf, o którym mowa, nazywamy *grafem strzałkowym funkcji* f.

■ Relacja określona na rysunku 21 nie jest funkcją, bo od elementu ○ zbioru A wychodzą dwie strzałki do dwóch różnych elementów zbioru B. Mamy tu

$$(○, ◇) \in R \quad \text{i} \quad (○, ▽) \in R \quad \text{i} \quad ◇ \neq ▽.$$

Graf funkcji (jako szczególnej relacji) sugeruje, aby na funkcję $f{:}X \longrightarrow Y$ spojrzeć jak na *przyporządkowanie*. Elementowi, od którego wychodzi strzałka jest niejako przyporządkowany element, do którego dochodzi strzałka. Od każdego elementu zbioru X wychodzi jednak dokładnie jedna strzałka. To przyporządkowanie jest zatem jednoznaczne. Tym samym mamy inne, następujące określenie funkcji.

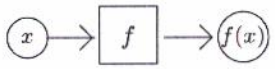
Definicja 4-2 [FUNKCJA JAKO PRZYPORZĄDKOWANIE] Niech X i Y będą dowolnymi zbiorami niepustymi. *Funkcją ze zbioru X w zbiór Y* nazywamy przyporządkowanie f, w którym każdemu elementowi zbioru X odpowiada dokładnie jeden element zbioru Y. Funkcję f nazywamy także *odwzorowaniem zbioru X w zbiór Y*. Jeśli $x \in X$ i elementowi x funkcja f przypisuje element y, to zapisujemy $f(x) = y$. Element y, czyli $f(x)$, nazywamy *wartością funkcji f dla elementu x*, albo *obrazem elementu x w odwzorowaniu f*.

■ *Inicjałami człowieka* nazywamy parę pierwszych liter imienia i nazwiska. Przyporządkowanie, w którym każdemu mieszkańcowi miejscowości M. są przypisane jego inicjały, jest funkcją. Ta funkcja przypisuje Janowi Kowalskiemu parę JK, a jego żonie Katarzynie – parę KK.

■ Każdemu człowiekowi w Polsce przypiszmy dzień, w którym on świętuje urodziny. Takie przyporządkowanie jest funkcją.

■ Cecha, którą jest liczba mieszkańców miasta (por. s. 20), jest funkcją określoną na populacji wszystkich polskich miast. Jej wartościami są liczby naturalne.

Traktujmy funkcję $f{:}X \longrightarrow Y$ jako przyporządkowanie. Temu przyporządkowaniu możemy nadać pewien sens. Funkcja f jest niejako automatem o dwu otworach: wejściu i wyjściu. Włożony do wejścia element x zostaje w tym automacie „przetworzony" w element $y = f(x)$. To przetwarzanie może się odbywać na różne sposoby. Mówimy, że różne mogą być przepisy na funkcję.



Rys. 27

■ Wzór $f(x) = 2x^2 - 3x + \pi$ jest przepisem, za pomocą którego z liczby rzeczywistej x zostaje utworzona liczba rzeczywista $2x^2 - 3x + \pi$. Mówimy, że funkcja f zadana jest przepisem $f(x) = 2x^2 - 3x + \pi$. Oznacza to, że funkcja f przypisuje liczbie rzeczywistej x taką liczbę y, że $y = 2x^2 - 3x + \pi$.

■ Funkcję f z zadania 4.1 (jest nią relacja R_1) możemy przedstawić w następującej tabeli:

f:

$x \in X$:	a	b	c	d	e
$f(x)$	♣	♠	♠	♡	♣

.

Jeśli $f{:}X \longrightarrow Y$ i X jest zbiorem skończonym, to funkcję f będziemy określać (przedstawiać) za pomocą tego typu tabeli.

■ Niech U będzie dowolnym niepustym zbiorem. Każdemu podzbiorowi A zbioru U przypiszmy jego dopełnienie, tj. zbiór $U \setminus A$. Zbiór $U \setminus A$ oznaczamy przez $\overline{A}$. Na zbiorze $X = 2^U$ określiliśmy funkcję f. Jest to funkcja $f{:}2^U \longrightarrow 2^U$ określona wzorem:

$$f(A) = \overline{A} \text{ dla } A \in 2^U.$$

4.8. Niech $U = \{a, b, c\}$. Na rodzinie 2^U określ funkcję f, która każdemu podzbiorowi zbioru U przypisuje jego dopełnienie. Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli.

□ Funkcja f, o której mowa w zadaniu, określona jest za pomocą następującej tabeli:

f:

$A \in 2^U$:	$\emptyset$	$\{a,b,c\}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$
$f(A)$:	$\{a,b,c\}$	$\emptyset$	$\{b,c\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b\}$	$\{c\}$	$\{b\}$	$\{a\}$

.

Definicja 4-3 [OBRAZ ZBIORU POPRZEZ FUKCJĘ] Niech $f{:}X \longrightarrow Y$ i $A \subset X$. *Obrazem zbioru A poprzez funkcję f* nazywamy zbiór

$$f(A) = \{y \in Y : [\exists x \in A : y = f(x)]\}.$$

Jeśli $A = X$, to zbiór $f(A)$, czyli zbiór $f(D_f)$, nazywamy *zbiorem wartości funkcji f*.

■ Wróćmy do funkcji f z zadania 4.1 Niech $A = \{a, b, c\}$. Jest tu $f(A) = \{♣, ♠\}$. Zbiorem wartości tej funkcji f jest zbiór $f(\{a, b, c, d, \}) = \{♣, ♠, ♡\}$.

Definicja 4-4 [FUNKCJA STAŁA] Funkcję $f{:}X \longrightarrow Y$ nazywamy *stałą*, jeżeli

$$\forall x_1 \in X \; \forall x_2 \in X : \{(x_1 \neq x_2) \Longrightarrow [f(x_1) = f(x_2)]\}.$$

Funkcja f jest stała wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór jej wartości, tj. zbiór $f(X)$, jest zbiorem jednoelementowym.

Definicja 4-5 [FUNKCJE RÓWNE] Funkcje f i g nazywamy *równymi*, jeśli

$$D_f = D_g \text{ i } \forall x \in D_f : [f(x) = g(x)].$$

4.9. Mamy 8 wyników trzykrotnego rzutu monetą. Tworzą one zbiór

$$\Omega = \{ooo, oor, oro, roo, ror, rro, orr, rrr\}.$$

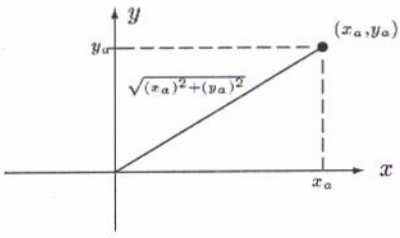
Każdemu wynikowi trzykrotnego rzutu monetą przypiszmy liczbę wyrzuconych reszek. O tej funkcji l_r ze zbioru Ω w $\mathbb{R}$ mowa jest w zadaniu 3.11 Określ tę funkcję grafem strzałkowym. Określ tę funkcję za pomocą tabeli.

4.10. Na s. 28 określono zbiór Ω wszystkich wyników dwukrotnego rzutu kostką (zob. rysunek 9). Przypiszmy każdemu wynikowi tego rzutu liczbę łącznie wyrzuconych oczek. Mowa tu o funkcji ze zbioru Ω w zbiór $\mathbb{R}$. Określ tę funkcję f.

W zadaniu 3.12 (s. 36) opisano relację R w zbiorze Ω wyników dwukrotnego rzutu kostką. Niech $\omega_1 \in \Omega$ i $\omega_2 \in \Omega$. Zauważ, że $\omega_1 R \omega_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(\omega_1) = f(\omega_2)$.

4.3. Niektóre funkcje w matematyce i fizyce

Długość odcinka, pole figury i objętość bryły, jako miary znane w geometrii, są szczególnymi funkcjami.



Rys. 28 Odległość punktu od początku układu współrzędnych jako funkcja

■ Każdemu punktowi płaszczyzny kartezjańskiej przypiszmy jego odległość od początku układu współrzędnych (rys. 28). To przyporządkowanie jest funkcją h ze zbioru $\mathbb{R}^2$ w $\mathbb{R}$. Punktowi o współrzędnych (x, y) przypisuje ona liczbę $\sqrt{x^2+y^2}$, czyli

$$h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{dla} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Definicja 4-6 [ROZKŁAD PRAWDOPODOBIEŃSTWA NA ZBIORZE SKOŃCZONYM] Niech $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s\}$. *Rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze* Ω nazywamy każdą funkcję p ze zbioru Ω w $\mathbb{R}$, nieujemną i taką, że $p(\omega_1) + p(\omega_2) + \ldots + p(\omega_s) = 1$.

■ Rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze $\Omega = \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$ jest funkcja p określona za pomocą następującej tabeli:

$\omega \in \Omega$:	$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$
$p(\omega)$:	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$

.

■ Rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_s\}$ jest funkcja p określona wzorem $p(\omega_j) = \frac{1}{s}$ dla $j = 1, 2, 3, \ldots, s$.

4.11. Niech $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, gdzie $n \in \mathbb{N}_2$. Wykaż, że jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze Ω funkcja p, gdzie

$$p(k) = \binom{n}{k}\left(\tfrac{1}{2}\right)^n \text{ dla } k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

4.12. Niech $p(k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Udowodnij, że funkcja p jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

[ROZKŁAD CECHY W POPULACJI] Niech X będzie cechą, która każdemu elementowi skończonej populacji Q przypisuje liczbę rzeczywistą (por. s. 20). Załóżmy, że wartości funkcji X tworzą zbiór $Q_X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_s\}$ i że dla $x_j \in Q_X$

$$p_X(x_j) = \frac{\textit{liczba elementów populacji } Q, \textit{ którym cecha } X \textit{ przypisuje wartość } x_j}{\textit{liczba wszystkich elementów populacji } Q}.$$

Funkcja p_X jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze Q_X. Nazywamy ją *rozkładem cechy X w populacji Q*.

Definicja 4-7 [SYMETRIA ŚRODKOWA] Niech o będzie ustalonym punktem płaszczyzny. Każdemu punktowi a tej płaszczyzny przypiszmy taki punkt a', że:
— jeśli $a = o$, to $a' = a$,
— jeśli $a \neq o$, to a' jest takim punktem na płaszczyźnie, że punkt o jest środkiem odcinka, którego końcami są punkty a i a'.

Takie przyporządkowanie punktom płaszczyzny punktów płaszczyzny jest funkcją S_o, którą w geometrii nazywamy *symetrią środkową względem punktu o.*

4.13. Niech S_o będzie symetrią środkową, A zaś odcinkiem o końcach a i b ($a \neq b$). Wykaż, że $S_o(A)$ jest odcinkiem o końcach $a' = S_o(a)$ i $b' = S_o(b)$.

Definicja 4-8 [SYMETRIA OSIOWA] Niech L będzie prostą na płaszczyźnie euklidesowej. Każdemu punktowi a na płaszczyźnie przypiszmy punkt a' w następujący sposób:
— jeśli $a \in L$, to $a' = a$,
— jeśli $a \notin L$, to a' jest takim punktem na płaszczyźnie, że prosta L jest symetralną odcinka o końcach a i a' (tj. przecina ten odcinek pod kątem prostym i w jego środku.
To przyporządkowanie jest funkcją S_L, zwaną *symetrią osiową względem prostej* L.

4.14. Niech A będzie odcinkiem, którego końcami są punkty a i b na płaszczyźnie, S_L zaś symetrią osiową względem prostej L. Znajdź zbiór $S_L(A)$, gdy:
a) $a \in L$ i $b \in L$,
b) $a \notin L$ lub $b \notin L$.
Czym jest obraz odcinka A poprzez funkcję S_L, a więc zbiór $S_L(A)$?

■ Rozważmy gaz zamknięty pod tłokiem. Załóżmy, że temperatura nie ulega zmianie. Ciśnienie tego gazu jest funkcją objętości, jaką wypełnia gaz. Każdej wartości takiej wielkości, jak objętość gazu, odpowiada w opisanej sytuacji dokładnie jedna wartość ciśnienia gazu.
■ Jeśli cząstka porusza się ze stałą prędkością v na prostej drodze, to w fizyce mówi się, że przebywana droga jest funkcją czasu. Jeśli w chwili t_0 cząstka znajduje się w punkcie x_0, to w chwili $t > t_0$ przebyta droga s jest iloczynem $v(t - t_0)$, a zatem jest funkcją s zmiennej t i zadaną wzorem $s(t) = v \cdot (t - t_0)$.

4.15. W geometrii określa się translację o wektor $\vec{w}$. To przekształcenie płaszczyzny na płaszczyznę jest pewną funkcją $T_{\vec{w}}$. Określ ją słownym opisem.

4.16. Trójkąt T, którego boki mają długości: 1, x i $(1 + x^2)$, gdzie $x \in \mathbb{R}_+$, jest trójkątem prostokątnym (dlaczego?). Objętość stożka powstałego przez obrót trójkąta T wokół boku o długości 1 jest funkcją v zmiennej x. Określ tę funkcję podając wzór na $v(x)$ dla $x \in \mathbb{R}_+$.

4.4. Funkcja charakterystyczna zbioru

Definicja 4-9 [FUNKCJA CHARAKTERYSTYCZNA ZBIORU] Niech U będzie dowolnym zbiorem niepustym. Niech $A \subset U$. Na zbiorze U określamy funkcję χ_A następująco:
— dla $x \in A$ jest $\chi_A(x) = 1$,
— dla $x \in U \setminus A$ jest $\chi_A(x) = 0$.
Taką funkcję $\chi_A : U \longrightarrow \{0, 1\}$ nazywamy *funkcją charakterystyczną podzbioru A zbioru U*, albo krótko: *funkcją charakterystyczną zbioru A.*

■ Jeśli U jest dowolnym zbiorem niepustym, to $\emptyset \subset U$ i $U \subset U$. Wtedy dla każdego $x \in U$ jest: $\chi_\emptyset(x) = 0$ oraz $\chi_U(x) = 1$. Funkcje charakterystyczne każdego z dwu niewłaściwych podzbiorów zbioru U (a są takimi zbiory: $\emptyset$ i U) są funkcjami stałymi.

4.17. Niech $U = \{a, b, c, d, e\}$ oraz $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, d, e\}$, $C = \{b, c, d, e\}$. Dla każdego z tych podzbiorów zbioru U określ funkcję charakterystyczną. Każdą z tych funkcji przedstaw za pomocą tabeli.

Niech U będzie dowolnym zbiorem n-elementowym i niech $A \subset U$. Wprowadzając funkcję charakterystyczną zbioru A określiliśmy funkcję $h : 2^U \longrightarrow \{0,1\}^n$, gdzie $\{0,1\}^n$ oznacza zbiór wszystkich ciągów n-wyrazowych o wyrazach ze zbioru $\{0,1\}$. Mamy tu $h(A) = \chi_A$ dla $A \subset U$.

4.18. W tabeli na rysunku 29 jest określonych 8 funkcji ze zbioru $U = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ w zbiór $\{0,1\}$. Każda z nich jest funkcją charakterystyczną pewnego podzbioru zbioru U. Określ zbiory A, B, C, D, E, F, G i H.

$x \in U$:	α	β	γ
$\chi_A(x)$	0	0	0
$\chi_B(x)$	1	0	0
$\chi_C(x)$	0	1	0
$\chi_D(x)$	0	0	1
$\chi_E(x)$	1	1	0
$\chi_F(x)$	1	0	1
$\chi_G(x)$	0	1	1
$\chi_H(x)$	1	1	1

Rys. 29 Funkcje charakterystyczne podzbiorów zbioru U

Funkcja charakterystyczna zbioru (jako podzbioru danego zbioru U) określa ten zbiór jednoznacznie, możemy ją zatem traktować jako pewien kod tego zbioru.

4.19. Niech $U = \{\spadesuit, \diamondsuit, \clubsuit, \heartsuit\}$. Dla każdego zbioru z rodziny 2^U określ jego funkcję charakterystyczną.

4.20. Niech $U = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$ oraz $A = \{\alpha, \beta\}$ i $B = \{\gamma, \delta, \epsilon\}$. Określ funkcje charakterystyczne zbiorów A, B oraz $A \cup B$ i $A \cap B$.

4.21. Niech $A \subset U$ i $B \subset U$ i $A \cap B = \emptyset$. Wykaż, że $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x)$ dla każdego $x \in U$.

4.22. Czy prawdziwa jest implikacja: „jeżeli $A \subset U$ i $B \subset U$, to dla każdego $x \in U$ zachodzi równość: $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$"?

4.23. Określ funkcję chakaterystyczną zbioru $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych jako podzbioru zbioru $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych.

4.5. Injekcja, surjekcja, bijekcja

■ Każdemu dorosłemu człowiekowi w Polsce przypisany jest numer ewidencyjny (PSL). Mowa tu o pewnej funkcji ze zbioru dorosłych Polaków w zbiór liczb naturalnych. Aby taki numer spełniał swoją rolę ta funkcja musi spełniać pewne warunki. Nie może się przecież zdarzyć, aby dwie osoby miały ten sam numer ewidencyjny, czyli różnym osobom powinny odpowiadać różne numery PSL.

Definicja 4-10 [INJEKCJA] Funkcję $f : X \longrightarrow Y$ nazywamy *różnowartościową*, jeśli różnym elementom zbioru X odpowiadają różne elementy zbioru Y, czyli gdy:

$$\forall x_1 \in X \; \forall x_2 \in X : \{(x_1 \neq x_2) \Longrightarrow [f(x_1) \neq f(x_2)]\}.$$

Różnowartościową funkcję $f : X \longrightarrow Y$ nazywamy także *odwzorowaniem jednoznacznym* albo *injekcją ze zbioru X w zbiór Y*.

■ Rejestracja samochodu ma służyć do identyfikacji jego właściciela. Aby spełniała tę rolę, każdy samochód musi mieć swój numer rejestracyjny i żadne dwa samochody nie mogą mieć identycznego numeru. Funkcja, która samochodowi przypisuje jego numer rejestracyjny musi więc być injekcją.

■ Rozważmy urnę U, w której są cztery kule białe, dwie czarne i jedna zieloną. Funkcja p, która wynikowi losowania kuli z urny U przypisuje jego prawdopodobieństwo, jest różnowartościowa. Ta funkcja p jest injekcją ze zbioru {b, c, z} w zbiór $\{\frac{4}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}\}$.

■ Każdemu człowiekowi w Polsce przypisana jest para (imię, nazwisko). Ta funkcja nie jest injekcją. Autor tej książki może tak twierdzić, bo w gronie jego znajomych są dwie Anny Sokołowskie, a w jego bloku mieszka trzech Janów Nowaków (dziadek, syn dziadka i wnuk).

■ Funkcja f z zadania 4.1 nie jest różnowartościowa, bo $f(b) = f(c) = \spadesuit$. Ta funkcja f nie jest zatem injekcją ze zbioru $X = \{a, b, c, d, e\}$ w zbiór $\{\clubsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \heartsuit\}$.

4.24. Miasteczko M. liczy 917 obywateli. Na s. 40 wspomniano o funkcji, która człowiekowi przypisuje jego inicjały. Załóżmy, że dziedziną tej funkcji jest zbiór mieszkańców miasteczka M. Wykaż, że wspomniana funkcja nie jest injekcją.

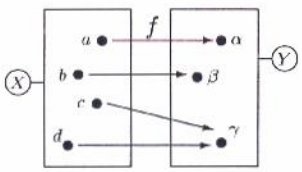
Jeśli funkcja $f : X \longrightarrow Y$ jest przedstawiona za pomocą grafu strzałkowego, to jest ona injekcją, jeśli do każdego elementu zbioru Y dochodzi co najwyżej jedna strzałka.

Definicja 4-11 [SURJEKCJA] Funkcję $f : X \longrightarrow Y$ nazywamy *surjekcją ze zbioru X na zbiór Y*, jeśli

$$\forall y \in Y \; \exists x \in X : [y = f(x)].$$

■ Funkcja f z zadania 4.1 nie jest surjekcją ze zbioru $X = \{a, b, c, d, e\}$ na zbiór $Y = \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$, bo dla elementu $\diamondsuit$ ze zbioru Y nie istnieje w zbiorze X taki element x, dla którego $f(x) = \diamondsuit$.

■ Surjekcją ze zbioru $X = \{a, b, c, d\}$ na zbiór $Y = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ jest funkcja f określona grafem strzałkowym na rysunku 30.



Rys. 30 Surjekcja f określona za pomocą grafu strzałkowego

Jeśli funkcja $f : X \longrightarrow Y$ jest przedstawiona za pomocą grafu strzałkowego, to jest ona surjekcją, wtedy i tylko wtedy, gdy do każdego elementu zbioru Y dochodzi co najmniej jedna strzałka.

Definicja 4-12 [BIJEKCJA] Funkcję $f : X \longrightarrow Y$, która jest równocześnie injekcją i surjekcją, nazywamy *bijekcją ze zbioru X na zbiór Y*.

■ Każdy uczeń w klasie liczącej s uczniów ma w dzienniku lekcyjnym swój numer. Tym samym na zbiorze uczniów określona jest funkcja. Jest ona bijekcją ze zbioru uczniów na zbiór $\{1, 2, 3, \ldots, s\}$.

■ Niech $A = (0,3)$ i $B = (0,9)$. Funkcja $f : A \longrightarrow B$, gdzie $f(x) = x^2$ jest bijekcją ze zbioru A na zbiór B. Niech $C = (-3,3)$ i $B = (0,9)$. Funkcja $g : C \longrightarrow B$, gdzie $g(x) = x^2$ nie jest bijekcją ze zbioru C na zbiór B, bo $g(-1) = g(1)$, czyli funkcja g nie jest injekcją.

■ Funkcja f określona na rysunku 30 nie jest bijekcją, bo nie jest injekcją.

Jeśli funkcja $f : X \longrightarrow Y$ jest przedstawiona za pomocą grafu strzałkowego, to jest ona bijekcją, jeśli do każdego elementu zbioru Y dochodzi dokładnie jedna strzałka.

4.25. Dane są dwa zbiory: $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ i $B = \{\bigcirc, \bigstar, \triangle\}$. Określ wszystkie bijekcje ze zbioru A na zbiór B.

□ Jest sześć takich bijekcji. Wszystkie określone są w tabeli na rysunku 31.

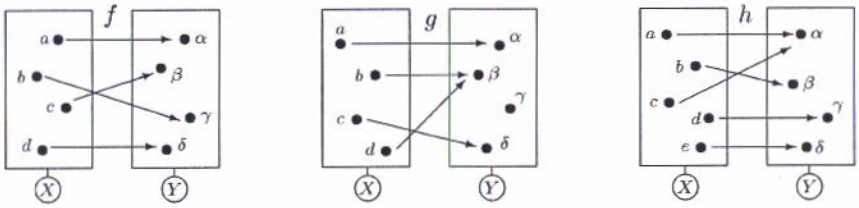
$x \in A$:	α	β	γ
$f_1(x)$:	$\bigcirc$	$\bigstar$	$\triangle$
$f_2(x)$:	$\bigcirc$	$\triangle$	$\bigstar$
$f_3(x)$:	$\bigstar$	$\bigcirc$	$\triangle$
$f_4(x)$:	$\bigstar$	$\triangle$	$\bigcirc$
$f_5(x)$:	$\triangle$	$\bigstar$	$\bigcirc$
$f_6(x)$:	$\triangle$	$\bigcirc$	$\bigstar$

Rys. 31 Bijekcje ze zbioru $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ na zbiór $\{\bigcirc, \bigstar, \triangle\}$

4.26. W zadaniu 4.8 na s. 41 mowa jest o funkcji f, która każdemu podzbiorowi zbioru $U = \{a, b, c\}$ przypisuje jego dopełnienie. Wykaż, że ta funkcja f jest bijekcją ze zbioru $2^{\{a,b,c\}}$ na zbiór $2^{\{a,b,c\}}$. Wykorzystaj tabelę ze s. 41.

4.27. Niech U będzie dowolnym zbiorem n-elementowym ($n > 1$) i $A \subset U$. Na s. 46 określono funkcję charakterystyczną zbioru A jako podzbioru zbioru U (definicja 4.27). Rozważmy nową funkcję $h : 2^U \longrightarrow \{0,1\}^n$, gdzie $h(A) = \chi_A$. Funkcja h przypisuje zatem każdemu podzbiorowi zbioru U jego funkcję charakterystyczną. Wykaż, że h jest bijekcją ze zbioru 2^U na zbiór $\{0,1\}^n$, gdzie n jest liczbą elementów zbioru U.

4.28. Dla każdej z trzech funkcji f, g i h ze zbioru X w zbiór Y, określonych na rysunku 32 za pomocą grafów strzałkowych, rozstrzygnij, czy jest ona injekcją, czy jest surjekcją, czy jest bijekcją.



Rys. 32 Grafy strzałkowe trzech funkcji f, g i h

4.6. Równoliczność zbiorów. Moc zbioru

Na grafie bijekcji ze zbioru X na zbiór Y, z każdego elementu zbioru X wychodzi dokładnie jedna strzałka i do każdego elementu zbioru Y dochodzi dokładnie jedna

strzałka. Taki graf ustala więc wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość pomiędzy elementami zbioru X i zbioru Y.

Definicja 4-13 [ZBIORY RÓWNOLICZNE] Mówimy, że dwa zbiory A i B są *równoliczne*, jeśli istnieje bijekcja f ze zbioru A na zbiór B. Fakt, że zbiory A i B są równoliczne, zapisujemy $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.

■ Jeżeli A jest zbiorem skończonym, to symbol $\overline{\overline{A}}$ oznacza liczbę jego elementów. Tę liczbę nazywamy *mocą zbioru* A. Równoliczność dwóch zbiorów skończonych jest zatem równoważna z tym, że te zbiory mają jednakową liczbę elementów.

4.29. Niech $A = \{1, 2, 3, \ldots\}$ i $B = \{2, 4, 6, \ldots\}$. Jest więc A zbiorem wszystkich liczb naturalnych dodatnich ($A = \mathbb{N}_1$), B zaś jest zbiorem liczb parzystych. Wykaż, że zbiory A i B są równoliczne.

□ Rozważmy funkcję, która liczbie naturalnej n ze zbioru A przyporządkowuje liczbę $2n$ ze zbioru B. Mowa tu o funkcji $f : A \longrightarrow B$ określonej wzorem

$$f(n) = 2n \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}_1 .$$

Ta funkcja jest różnowartościowa, bo z faktu, że $n_1 \neq n_2$ wynika, że $2n_1 \neq 2n_2$. Funkcja f jest surjekcją, bo każda liczba parzysta jest wartością funkcji f dla pewnej liczby naturalnej (liczba parzysta $2n$ jest wartością funkcji f dla liczby naturalnej n). Funkcja f jest zatem bijekcją ze zbioru liczb naturalnych na zbiór liczb parzystych, a to dowodzi, że zbiory A i B są równoliczne.

■ Ciągów n-wyrazowych o wyrazach ze zbioru $\{0, 1\}$ jest 2^n (bo na tyle sposobów można taki ciąg skonstruować). Jeśli ponumerujemy elementy zbioru n-elementowego U liczbami od 1 do n, to każdy taki ciąg jest funkcją charakterystyczną pewnego podzbioru zbioru U. Z rozwiązania zadania 4.27 wynika, że podzbiorów zbioru n-elementowego U jest 2^n.

Zbiory dzielimy na skończone i nieskończone. Do zbiorów skończonych zaliczamy: zbiór pusty $\emptyset$, zbiory jednoelementowe i zbiory równoliczne ze zbiorem $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, gdzie $n \in \mathbb{N}_2$. Zbiory $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$ to nie są zbiory skończone, to są zbiory nieskończone. Nieskończony jest zbiór wszystkich prostych przechodzących przez ustalony punkt na płaszczyźnie.

Definicja 4-14 [ZBIÓR PRZELICZALNY] Każdy zbiór równoliczny ze zbiorem $\mathbb{N}$ liczb naturalnych nazywamy *zbiorem przeliczalnym*.

■ Zbiór przeliczalny nie jest zbiorem skończonym.

■ Zbiór $\mathbb{N}_k$ liczb naturalnych większych lub równych k jest przeliczalny. Z rozwiązania zadania 4.29 wynika, że zbiór liczb parzystych jest przeliczalny.

Twierdzenie 4-1 *Każdy zbiór nieskończony zawiera podzbiór przeliczalny.*

Każdy podzbiór zbioru przeliczalnego jest albo skończony albo przeliczalny.

Definicja 4-15 [ZBIÓR CO NAJWYŻEJ PRZELICZALNY] Każdy zbiór, który jest skończony albo przeliczalny, nazywamy *zbiorem co najwyżej przeliczalnym*.

Definicja 4-16 [ZBIÓR NIEPRZELICZALNY] Zbiór nieskończony, który nie jest przeliczalny, nazywamy *zbiorem nieprzeliczalnym*.

■ Zbiór $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych jest przeliczalny. Zbiór $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalny. Nieprzeliczalny jest także zbiór $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ liczb niewymiernych.

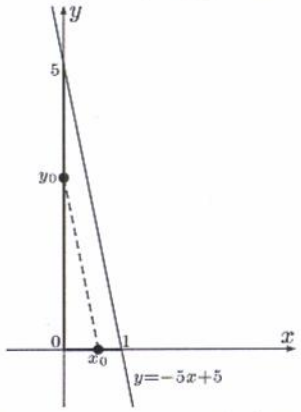
Twierdzenie 4-2 *Zbiór A jest przeliczalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje surjekcja f ze zbioru $\mathbb{N}$ na zbiór A.*

4.30. Udowodnij, że zbiór liczb podzielnych przez 3 jest przeliczalny. Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną większą od 1. Udowodnij, że zbiór liczb naturalnych podzielnych przez n jest przeliczalny.

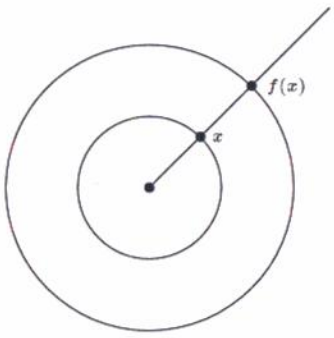
4.31. Niech $A = (0,1)$ i $B = (0,5)$. Wykaż, że te dwa zbiory liczbowe są równoliczne.

□ Funkcja $f : (0,1) \longrightarrow (0,5)$, gdzie $f(x) = 5x$, jest różnowartościowa i $f((0,1)) = (0,5)$, a zatem f jest bijekcją ze zbioru $A = (0,1)$ na zbiór $B = (0,5)$.

□ Rysunek 33 sugeruje inną bijekcję ustalającą równoliczność przedziałów liczbowych $(0,1)$ i $(0,5)$. Umieśćmy przedział $(0,1)$ na osi odciętych, przedział $(0,5)$ zaś na osi rzędnych. Funkcję f określmy następująco (zob. rysunek 33):
— Końce przedziałów $(0,1)$ i $(0,5)$ wyznaczają prostą L o równaniu $y = -5x + 5$.
— Weźmy dowolny punkt x_0 z przedziału $(0,1)$ na osi odciętych i poprowadźmy przez ten punkt prostą równoległą do prostej L.
— Punkt y_0 przecięcia się tej prostej z osią rzędnych uznajmy za wartość funkcji f w punkcie x_0.
Tak określona funkcja jest różnowartościowa (uzasadnij to!) i jest surjekcją (wykaż to!), a zatem jest bijekcją, która ustala równoliczność zbiorów $A = (0,1)$ i $B = (0,5)$.



Rys. 33 Bijekcja ze zbioru $(0,1)$ na $(0,5)$



Rys. 34 Bijekcja f z okręgu A na okrąg B

4.32. Okrąg na płaszczyźnie euklidesowej jest pewnym zbiorem punktów. Wykaż, że:
a) każde dwa okręgi współśrodkowe są zbiorami równolicznymi (skorzystaj z rysunku 34),
b) każde dwa okręgi na płaszczyźnie euklidesowej są równoliczne.

□ Niech A oznacza zbiór punktów mniejszego okręgu na rysunku 34, B zaś zbiór punktów większego z tych okręgów. Rysunek 34 sugeruje, jak określić bijekcję f ustalającą równoliczność zbiorów A i B. Niech $x \in A$ i rozważmy półprostą o początku w środku obu okręgów i przechodzącą przez punkt x okręgu A. Ta półprosta przecina okrąg B dokładnie w jednym punkcie. Potraktujmy ten punkt jako wartość funkcji f w punkcie x. Tak określona funkcja f jest różnowartościowa. Każdy punkt okręgu B jest wartością funkcji f dla pewnego punktu okręgu A, a zatem funkcja f jest surjekcją. Funkcja f jest zatem bijekcją ze zbioru punktów okręgu A na zbiór punktów okręgu B, a zatem te okręgi jako zbiory punktów są równoliczne.

4.33. Udowodnij, że następujące zbiory A i B są równoliczne:
a) $A = \{1, 2, 3, \ldots\}$ (zbiór $\mathbb{N}_1$) i $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ (jest to zbiór $\mathbb{N}$, zob. s. 20),
b) $A = \{1, 2, 3, \ldots\}$ i $B = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ (zbiór liczb parzystych),
c) $A = (-\infty, +\infty)$ i $B = (0, 1)$,
d) $A = \{c : c = a + b\sqrt{2} \wedge (a \in \mathbb{Q}) \wedge (b \in \mathbb{Q})\}$ i $B = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Twierdzenie 4-3 [TWIERDZENIE CANTORA-BERNSTEINA] *Jeśli zbiór A jest równoliczny z pewnym podzbiorem zbioru B i zbiór B jest równoliczny z pewnym podzbiorem zbioru A, to zbiory A i B są równoliczne.*

4.7. Złożenie funkcji, czyli funkcja złożona. Funkcja odwrotna

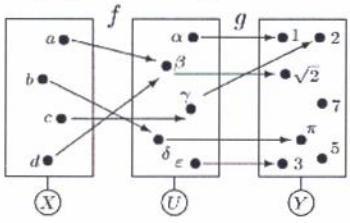
Definicja 4-17 [FUNKCJA ZŁOŻONA] Jeśli $f : X \longrightarrow U$ i $g : U \longrightarrow Y$, to przyporządkowanie $h : X \longrightarrow Y$ określone wzorem

$$\forall x \in X : [h(x) = g(f(x))],$$

nazywamy *złożeniem funkcji* f i g i oznaczamy symbolem $g \circ f$. Funkcję f nazywamy *funkcją wewnętrzną tego złożenia*, funkcję g zaś – *funkcją zewnętrzną*. Funkcję h nazywamy *funkcją złożoną*.

Warunkiem istnienia funkcji $g \circ f$, tj. złożenia funkcji f i g, jest to, by zbiór wartości funkcji f był podzbiorem dziedziny funkcji g

■ Na rysunku 35 określone są grafem strzałkowym funkcje f i g. Zbiór wartości funkcji f zawiera się w dziedzinie funkcji g, można więc określić funkcję złożoną $h = g \circ f$.



Rys. 35 Grafy strzałkowe dwu funkcji f i g

Dziedziną funkcji złożonej h jest zbiór $X = \{a, b, c, d\}$, jej wartości należą do zbioru $Y = \{1, 2, 3, 5, \sqrt{2}, 7, \pi\}$. Jest to funkcja określona następująco:

h:

$x \in X$:	a	b	c	d
$h(x)$:	$\sqrt{2}$	π	2	$\sqrt{2}$

.

Funkcja f nie jest różnowartościowa, bo $f(a) = f(d) = \beta$. Funkcja h także nie jest różnowartościowa, bo $h(a) = h(d) = \sqrt{2}$. Określ zbiór $h(\{a, b, c, d\})$.

4.34. Dane są dwie funkcje określone tabelami:

f:

$x \in D_f$:	@	#	*	%	o
$f(x)$:	a	b	c	d	e

g:

$f(x)$:	a	b	c	d	e
$x \in D_f$:	@	#	*	%	o

.

Określ złożenia tych funkcji, tj. funkcje $f \circ g$ oraz $g \circ f$.

Definicja 4-18 [FUNKCJA ODWROTNA] Jeżeli funkcja $f : X \longrightarrow Y$ jest różnowartościowa i $f(X) = Y_f$ jest zbiorem jej wartości, to funkcję $g : Y_f \longrightarrow X$, gdzie

$$\forall x \in X \; \forall y \in Y_f : \{[g(y) = x] \Longleftrightarrow [f(x) = y]\},$$

nazywamy *funkcją odwrotną do* f i oznaczamy symbolem f^{-1}.

■ Niech $X = \{a, b, c, d\}$ i $Y = \{\diamondsuit, \spadesuit, \heartsuit, \clubsuit\}$. Funkcja $f : X \longrightarrow Y$, gdzie

f :

$x \in X$:	a	b	c	d
$f(x)$:	$\diamondsuit$	$\spadesuit$	$\heartsuit$	$\clubsuit$

jest różnowartościowa. Funkcją odwrotną do funkcji f jest funkcja g określona następująco:

g :

$y \in Y$:	$\diamondsuit$	$\spadesuit$	$\heartsuit$	$\clubsuit$
$g(y)$:	a	b	c	d

4.35. Zauważ, że w przypadku funkcji f i g, o których mowa w zadaniu 4.34, funkcja g jest odwrotna do funkcji f (czyli $g = f^{-1}$) i funkcja f jest odwrotna do funkcji g (czyli $f = g^{-1}$). Czy jest to zbieg okoliczności, czy też pewna prawidłowość? Sformułuj i udowodnij twierdzenie, jakie sugeruje ten przykład funkcji f i g.

Definicja 4-19 [MIEJSCE ZEROWE FUNKCJI] Niech $f : X \longrightarrow Y \subset \mathbb{R}$. Każdy element x_0 ze zbioru X, dla którego $f(x_0) = 0$, nazywamy *miejscem zerowym* funkcji f.

■ Załóżmy, że A jest podzbiorem co najmniej dwuelementowego zbioru U oraz $A \neq \emptyset$ i $A \neq U$. Miejsce zerowym funkcji charakterystycznej χ_A zbioru A jest każdy element zbioru U, który nie należy do A.

4.36. Każdej liczbie naturalnej większej od 1 przypiszmy liczbę jej podzielników (różnych od 1 i różnych od tej liczby). Określ zbiór miejsc zerowych tej funkcji $g : \mathbb{N}_2 \longrightarrow \mathbb{N}$.

4.37. Każdemu wynikowi trzykrotnego rzutu monetą przypiszmy liczbę wyrzuconych reszek (por. zadanie 4.9 na s. 41). Wskaż miejsca zerowe tej funkcji.

4.8. Funkcje liczbowo-liczbowe

Definicja 4-20 [FUNKCJA LICZBOWO-LICZBOWA] Jeżeli $X \subset \mathbb{R}$ i $Y \subset \mathbb{R}$, to funkcję $f : X \longrightarrow Y$, nazywamy *funkcją liczbowo-liczbową*.

■ *Odwrotnością liczby rzeczywistej* x, gdzie $x \neq 0$, nazywamy liczbę $\frac{1}{x}$. Funkcja $f : \mathbb{N}_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, która liczbie naturalnej dodatniej przyporządkowuje jej odwrotność, jest funkcją liczbowo-liczbową. Ta funkcja f jest określona następującym wzorem (przepisem): $f(x) = \frac{1}{x}$ dla $x \in \mathbb{N}_1$.

■ Przypiszmy każdej liczbie rzeczywistej dodatniej jej pierwiastek kwadratowy. W ten sposób na zbiorze $\mathbb{R}_+$ określamy funkcję f. Jest to funkcja liczbowo-liczbowa określona wzorem $f(x) = \sqrt{x}$ dla $x \in \mathbb{R}_+$.

■ Dla każdej liczby rzeczywistej x określa się jej wartość bezwzględną $|x|$ (por. def. 2-6 na s. 23). W ten sposób na zbiorze $\mathbb{R}$ zostaje określona pewna funkcja liczbowo-liczbowa f. Jest ona określona wzorem $f(x) = |x|$.

Definicja 4-21 [FUNKCJA SIGNUM] Dla każdej liczby rzeczywistej x wprowadza się w matematyce tzw. *znak*, oznaczany symbolem $sgn(x)$. Jest on określony następująco:

$$sgn(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla} \quad x < 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0, \\ 1 & \text{dla} \quad x > 0. \end{cases}$$

Na zbiorze $\mathbb{R}$ jest więc określona funkcja liczbowo-liczbowa f, gdzie $f(x) = sgn(x)$. Nazywa się ją *funkcją signum*.

Definicja 4-22 [SILNIA] Jeśli $n \in \mathbb{N}$, to symbolem $n!$ oznacza się liczbę naturalną powstałą z liczby naturalnej n w następujący sposób:
— jeśli $n = 0$, to $n! = 1$,
— jeśli $n > 1$, to $n! = (n-1)! \cdot n$.
Mowa tu o funkcji $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ określonej przepisem:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad n = 0, \\ (n-1)! \cdot n & \text{dla} \quad n > 0. \end{cases}$$

Tę funkcję liczbowo-liczbową f nazywa się *silnią*.

Jest: $1! = 0! \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$, $2! = 1! \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 2! \cdot 3 = (1 \cdot 2) \cdot 3 = 6$, $4! = 3! \cdot 4 = (1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.
Jeśli $n \in \mathbb{N}_2$, to $n!$ jest iloczynem kolejnych liczb naturalnych od 1 do n.

4.38. Przedstaw za pomocą grafu oraz za pomocą tabeli każdą z następujących funkcji liczbowo-liczbowych:

a) $f : \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\} \longrightarrow \{0, 1, 4, 9, 16\}$, gdzie $f(x) = x^2$,

b) $g : \{-\pi, -\sqrt{5}, -\sqrt{3}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi\} \longrightarrow \mathbb{N}$, gdzie $g(x) = |[x] + 1|$,

c) $h : \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \longrightarrow \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, gdzie $h(x) = 5 - x$.

Dla każdej z tych funkcji rozstrzygnij, czy jest ona różnowartościowa. Która z nich jest bijekcją?

4.39. Dane są dwie funkcje liczbowo-liczbowe: $f(x) = x^2$ i $g(x) = 2^x$. Określ funkcje złożone $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$. Wykaż, że funkcja g jest różnowartościowa oraz że funkcja f taką nie jest. Znajdź funkcję g^{-1} odwrotną do funkcji g.

Definicja 4-23 [FUNKCJA DIRICHLETA] Funkcję $D : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{dla} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

nazywamy *funkcją Dirichleta*.

Zauważ, że funkcja Dirichleta jest funkcją charakterystyczną zbioru $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych jako podzbioru zbioru $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych (por. zadanie 4.23 na s. 44).

Jest: $D(-\pi) = 0$, $D(\sqrt{2}) = 0$, $D(\pi - 3{,}14) = 0$, $D(0) = 1$, $D((1 + \frac{1}{n})^n) = 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$. Jest także $D(\frac{\pi+1}{\pi}) = 0$, ale $D(\frac{\pi}{\pi}) = 1$.

4.9. Suma, różnica, iloczyn i iloraz funkcji liczbowo-liczbowych

Definicja 4-24 Niech $f : X \longrightarrow Y$ i $g : X \longrightarrow Y$, gdzie $X \subset \mathbb{R}$ i $Y \subset \mathbb{R}$.

a) *Sumą funkcji f i g* nazywamy funkcję $h : X \longrightarrow Y$ określoną wzorem:

$$\forall x \in X : [h(x) = f(x) + g(x)].$$

Sumę funkcji f i g oznaczamy symbolem $f + g$. Jest więc $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

b) *Różnicą funkcji f i g* nazywamy funkcję $h : X \longrightarrow Y$ określoną wzorem:

$$\forall x \in X : [h(x) = f(x) - g(x)].$$

Różnicę funkcji f i g oznaczamy przez $f - g$. Jest zatem $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$.

c) *Iloczynem funkcji f i g* nazywamy funkcję $h : X \longrightarrow Y$ określoną wzorem:

$$\forall x \in X : [h(x) = f(x) \cdot g(x)].$$

Iloczyn funkcji f i g oznaczamy przez $f \cdot g$. Jest więc $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

d) Załóżmy, że $g(x) \neq 0$ dla każdego $x \in X$. *Ilorazem funkcji f i g* nazywamy funkcję $h: X \longrightarrow Y$ określoną wzorem:

$$\forall x \in X : [h(x) = \tfrac{f(x)}{g(x)}].$$

Iloraz funkcji f i g oznaczamy przez $\frac{f}{g}$. Jest więc $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Definicja 4-25 Jeśli a i b są ustalonymi liczbami rzeczywistymi to:
— funkcję h określoną wzorem $h(x) = a \cdot f(x)$ nazywamy *iloczynem funkcji f oraz stałej a* i oznaczamy przez af,
— funkcję h określoną wzorem $h(x) = f(x) + b$ nazywamy sumą funkcji f oraz stałej b i oznaczamy przez $f + b$.

4.40. Funkcja $h(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ jest ilorazem dwu funkcji: $f(x) = x^2 - 9$ i $g(x) = x - 3$ dla $x \neq 3$. Zauważ, że $\frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x + 3$. Czy funkcje f i g, gdzie $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ i $g(x) = x + 3$ są równe? Dlaczego?

4.10. Wykres funkcji liczbowo-liczbowej

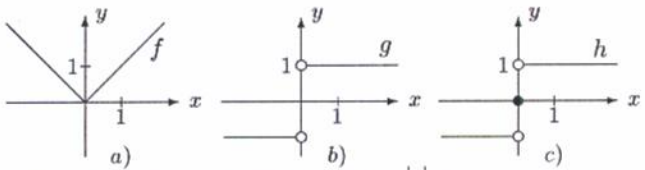
Funkcja liczbowo-liczbowa $f: X \longrightarrow Y$ jest zbiorem par liczb. Jest to zbiór par postaci $(x, f(x))$, gdzie $x \in X$. Każdą parę liczb interpretujemy jako punkt płaszczyzny kartezjańskiej $\mathbb{R}^2$. Funkcję liczbowo-liczbową możemy zatem utożsamiać z pewnym zbiorem punktów na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Definicja 4-26 [WYKRES FUNKCJI LICZBOWO-LICZBOWEJ] Niech $f: X \longrightarrow Y$ będzie funkcją liczbowo-liczbową. Zbiór

$$W_f = \{(x, y) : [(x \in X) \wedge (y = f(x))]\},$$

jako zbiór punktów płaszczyzny kartezjańskiej, nazywamy *wykresem funkcji f*.
Jeśli punkt należy do wykresu funkcji, to zaznaczamy go zapełnionym kółkiem •, jeśli nie należy – to pustym kółkiem ∘.

4.41. Naszkicuj wykresy funkcji $f(x) = |x|$ oraz $g(x) = \frac{|x|}{x}$. Niech $h(x) = sgn(x)$ (funkcja *signum*, zob. s. 50). Czy funkcje g i h są równe?



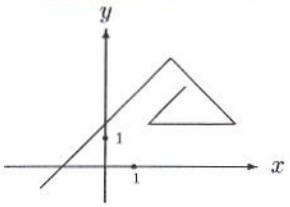
Rys. 36 Wykresy funkcji: $f(x) = |x|$, $g(x) = \frac{|x|}{x}$ i funkcji $h(x) = sgn(x)$

4.42. Naszkicuj wykres funkcji liczbowo-liczbowej określonej następującym wzorem wieloczłonowym:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad |x| \leqslant 1, \\ 1 & \text{dla} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

4.43. Naszkicuj wykres funkcji $f: \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x-1| < 2\} \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie $f(x) = 2x+1$.

4.44. Czy łamana z rysunku 37 może być wykresem funkcji liczbowo-liczbowej? Jakie warunki musi spełniać zbiór punktów w układzie współrzędnych, aby był wykresem pewnej funkcji liczbowo-liczbowej?



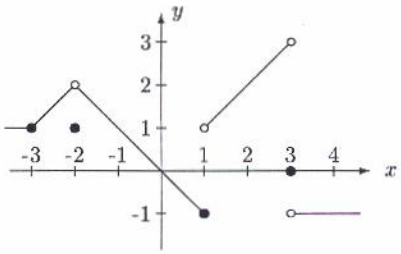
Rys. 37 Czy ta łamana jest wykresem funkcji liczbowo-liczbowej?

Z definicji funkcji liczbowo-liczbowej f wynika, że w zbiorze W_f nie może być takich dwu punktów, które mają tę samą odciętą (I współrzędna) i różne rzędne (II współrzędne). Zbiór punktów na płaszczyźnie kartezjańskiej jest wykresem funkcji wtedy i tylko wtedy, gdy każda prosta prostopadła do osi odciętych (oś Ox) ma z tym zbiorem co najwyżej jeden punkt wspólny.

Z wykresu funkcji liczbowo-liczbowej można odczytać, czy jest to funkcja różnowartościowa. Wykres przedstawia funkcję różnowartościową wtedy i tylko wtedy, gdy każda prosta równoległa do osi odciętych ma z tym zbiorem co najwyżej jeden punkt wspólny. Miejscami zerowymi funkcji liczbowej są odcięte tych punktów, w których wykres przecina oś odciętych.

4.45. Które półokręgi na płaszczyźnie kartezjańskiej są, a które nie są wykresami funkcji liczbowo-liczbowej?

4.46. Na rysunku 38 mamy wykres funkcji f. Podaj wzór na $f(x)$. Korzystając z wykresu funkcji f wykaż, że nie jest to funkcja różnowartościowa.



Rys. 38 Wykres pewnej funkcji liczbowo-liczbowej f

4.47. Narysuj wykres funkcji f jeśli:
a) $f:[0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ i $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$,
b) $f:\mathbb{N}_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ i $f(x) = \frac{1}{x}$,
c) $f:(-\infty,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ i $f(x) = -x^2 + 1$,
d) $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $f(x) = -x^2 + 1$,
e) $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $f(x) = -x^2 + 1$ dla $x \leqslant 1$ i $f(x) = x - 1$ dla $x > 1$.
g) $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $f(x) = x - |5 - x|$.
Dla każdej z tych funkcji znajdź zbiór jej wartości. Jak ten zbiór odczytać z wykresu funkcji? Która z tych funkcji ma miejsca zerowe?

□ Niech W_f będzie wykresem funkcji liczbowo-liczbowej $f:X \longrightarrow Y$. Aby wyznaczyć zbiór $f(X)$ jej wartości wystarczy zrzutować ten wykres W_f na oś rzędnych.

W zadaniu 4.47 wszystkie funkcje są określone wzorem. W przypadku piątej funkcji (e) ten wzór jest inny dla $x \in (-\infty, 1]$ niż dla $x \in (1, +\infty)$. Przepis na tę funkcję można zapisać w postaci:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{dla} \quad x \in (-\infty, 1], \\ x - 1 & \text{dla} \quad x \in (1, +\infty), \end{cases}$$

albo w postaci:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{dla} \quad x \leqslant 1, \\ x - 1 & \text{dla} \quad x > 1. \end{cases}$$

Funkcja f jest określona przepisem (wzorem) wieloczłonowym. Takim przepisem wieloczłonowym została określona funkcja *signum* (*znak*) oraz funkcja *silnia*.

W przypadku funkcji określonej w zadaniu 4.47g) jest:

$$f(x) = \begin{cases} x - (5 - x) & \text{gdy} \quad 5 - x \geqslant 0, \\ x - (x - 5) & \text{gdy} \quad 5 - x < 0, \end{cases}$$

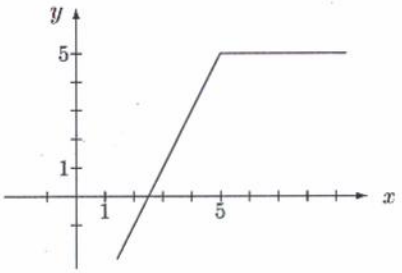
czyli

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{dla} \quad 5 - x \geqslant 0, \\ 5 & \text{dla} \quad 5 - x < 0. \end{cases}$$

Ostatecznie przepis na tę funkcję jest następujący:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{dla} \quad x \leqslant 5, \\ 5 & \text{dla} \quad x > 5. \end{cases}$$

Wykres tej funkcji f przedstawiono na rysunku 39.



Rys. 39 Wykres funkcji $f(x) = x - |5 - x|$

4.48. Funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest określona następującym przepisem wieloczłonowym:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{dla} \quad x \in (-\infty, -1), \\ |x| & \text{dla} \quad x \in [-1, 1], \\ 1 & \text{dla} \quad x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Znajdź: $f(\pi - 3,14)$, $f(\sqrt{13})$, $f(1 - \frac{1}{n})$ oraz $f(\frac{1}{n})$ dla $n \in \mathbb{N}_1$. Narysuj wykres funkcji f. Wyznacz zbiór wartości tej funkcji. Czy ma ona miejsca zerowe?

4.49. Opisz wykres funkcji $d : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie $d(x) = x$ dla $x \in \mathbb{Q}$ i $d(x) = -x$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Czy ta funkcja d jest bijekcją ze zbioru $\mathbb{R}$ na zbiór $\mathbb{R}$? Dlaczego?

4.50. Naszkicuj wykres funkcji $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x) = |max\{\pi, x\}|$. Czy jest to funkcja różnowartościowa?

Definicja 4-27 [CECHA] Niech $x \in \mathbb{R}$. Symbolem $[x]$ oznacza się w matematyce największą liczbę całkowitą nie większą od x, czyli nie przekraczającą x. Tę liczbę $[x]$ nazywamy *cechą liczby* x. Symbol $[x]$ czytamy także: „całość z x". Funkcję $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie $f(x) = [x]$, nazywa się *entier* (po francusku: „cały").

■ Jest $[\pi] = 3$, $[-\sqrt{2}] = -2$, $[\sqrt{2}] = 1$. Jest $[\frac{1}{n}] = 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$. Dla każdej liczby rzeczywistej x jest $[x] \leqslant x < [x] + 1$.

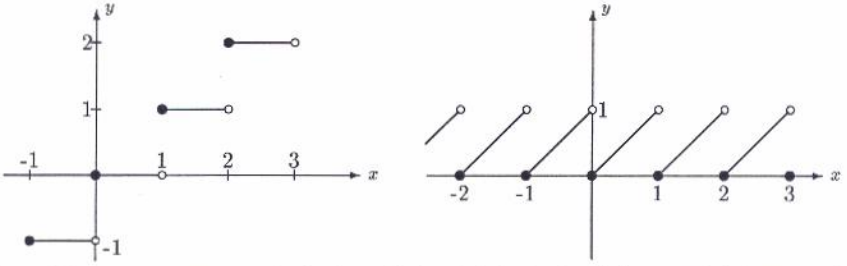
4.51. Wykaż, że:
a) $1 + [-x] = -[x]$ dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,
b) $[1 + x] = [x] + 1$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

4.52. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = [x]$ dla $x \in \mathbb{R}$ (funkcji entier).

Definicja 4-28 [MANTYSA] Niech $x \in \mathbb{R}$. Liczbę $x - [x]$, gdzie $[x]$ jest cechą liczby x, nazywamy *mantysą liczby rzeczywistej* x. Funkcję $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie $g(x) = x - [x]$, nazywamy *mantysą*.

■ Mantysą liczby 17 jest liczba 0. Mantysą liczby $(\pi - 3,14)$ jest liczba $(\pi - 3,14)$ (dlaczego?). Mantysą liczby $-3,14$ jest liczba 0,14. Mantysą liczby $\frac{37}{5}$ jest liczba $\frac{2}{5}$.

Wykresy funkcji entier i mantysa mamy na rysunku 40.



Rys. 40 Fragmenty wykresów funkcji: $f(x) = [x]$ (cecha) i $g(x) = x - [x]$ (mantysa)

4.53. Funkcja liczbowo-liczbowa f jest określona na zbiorze $\mathbb{R}$ następującym wzorem $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$. Naszkicuj wykres tej funkcji. Znajdź $f(\mathbb{R})$, a więc zbiór jej wartości. Wyznacz $f(\{0, 1, \frac{1}{2}, \pi, 17\})$. Czy ta funkcja f jest różnowartościowa?

4.54. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Opisz, jak z jej wykresu uzyskać wykres funkcji:
a) $f_1(x) = f(-x)$, b) $f_2(x) = |f(x)|$, c) $f_3(x) = |f(x)| + 1$,
d) $f_4(x) = f(|x|)$, e) $f_5(x) = |f(|x|)|$, f) $f_6(x) = |-f(-x)|$.

4.11. Monotoniczne funkcje liczbowo-liczbowe

Definicja 4-29 [FUNKCJE MONOTONICZNE] Mówimy, że funkcja liczbowo-liczbowa $f : X \longrightarrow Y$ jest:
— *rosnąca*, jeżeli $\forall x_1 \in X\ \forall x_2 \in X : \{(x_1 > x_2) \Longrightarrow [f(x_1) > f(x_2)]\}$,
— *niemalejąca*, jeżeli $\forall x_1 \in X\ \forall x_2 \in X : \{(x_1 > x_2) \Longrightarrow [f(x_1) \geqslant f(x_2)]\}$,
— *malejąca*, jeżeli $\forall x_1 \in X\ \forall x_2 \in X : \{(x_1 > x_2) \Longrightarrow [f(x_1) < f(x_2)]\}$,
— *nierosnąca*, jeżeli $\forall x_1 \in X\ \forall x_2 \in X : \{(x_1 > x_2) \Longrightarrow [f(x_1) \leqslant f(x_2)]\}$.

Funkcje rosnące, malejące, niemalejące i nierosnące, nazywamy *funkcjami monotonicznymi. Funkcje rosnące i funkcje malejące nazywamy funkcjami ściśle monotonicznymi.*

Zbadać monotoniczność funkcji liczbowo-liczbowej f oznacza rozstrzygnąć, czy funkcja jest rosnąca, niemalejąca, malejąca lub nierosnąca (i odpowiedź uzasadnić).

4.55. Rozstrzygnij, czy są prawdziwe zdania:
a) *„jeżeli funkcja f nie jest rosnąca, to funkcja f jest nierosnąca"*,
b) *„jeżeli funkcja f nie jest malejąca, to funkcja f jest niemalejąca"*.
c) *„jeśli funkcja f nie jest rosnąca, to funkcja f jest malejąca"*,
d) *„jeśli funkcja f nie jest nierosnąca, to funkcja f jest malejąca"*.

4.56. Dane są następujące funkcje liczbowo-liczbowe:
a) $f(x) = 4x - 7$, b) $g(x) = x^2$ dla $x \leqslant 0$, c) $h(x) = x^2$.
Które z tych funkcji są różnowartościowe? Które z nich są monotoniczne?

4.57. Udowodnij, że:
a) funkcja $f(x) = |x|$ dla $x \in \mathbb{R}$ nie jest rosnąca i że nie jest również malejąca,
b) funkcja $f(x) = \operatorname{tg} x$ nie jest funkcją rosnącą,

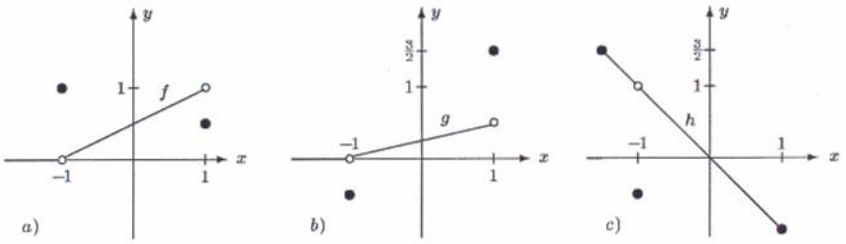
4.58. Udowodnij, że funkcja $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 27$ jest rosnąca.

Zauważ, że: $x^3 - 3x^2 + 3x + 27 = (x-1)^3 + 28$.

4.59. Udowodnij, że funkcja $f(x) = [x]$ dla $x \in \mathbb{R}$ jest funkcją niemalejącą.

4.60. Udowodnij, że każda funkcja rosnąca jest różnowartościowa i że każda funkcja malejąca jest różnowartościowa.

4.61. Udowodnij, że każda z niżej określonych funkcji jest rosnąca na zadanym zbiorze:
a) $f(x) = \frac{1}{x^4+1}$, gdzie $x \in (-\infty, 0]$,
b) $g(x) = \sqrt{x+1}$, gdzie $x \in [-1, +\infty)$,
c) $h(x) = x^3 + 13$, gdzie $x \in \mathbb{R}$.
Każda z powyższych funkcji (jako funkcja rosnąca) jest różnowartościowa. Do każdej z nich określ funkcję odwrotną.



Rys. 41 Wykresy trzech funkcji liczbowo-liczbowych: f, g i h

4.62. Na rysunku 41 mamy wykresy trzech funkcji liczbowo-liczbowych: f, g i h. Czy funkcja f jest rosnąca? Czy jest rosnąca funkcja g? Czy funkcja h jest malejąca? Każdą odpowiedź uzasadnij, korzystając z definicji funkcji rosnącej i funkcji malejącej.

4.63. Zbadaj monotoniczność następujących funkcji liczbowo-liczbowych:
a) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $f_1(x) = 2x + 1$, b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $f_2(x) = x^2 - 4$,
c) $f_3 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ i $f_3(x) = x^2 - 4$, d) $f_4 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $f_4(x) = \frac{x-1}{x+1}$,
e) $f_5 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $f_5(x) = max\{6, -x\}$, f) $f_6 7 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $f_6(x) = x + |x|$.

Twierdzenie 4-4 *Jeżeli funkcje f i g są określone na tym samym zbiorze liczbowym i każda z nich jest funkcją rosnącą, to suma tych funkcji jest też funkcją rosnącą,*

Twierdzenie 4-5 *Jeżeli funkcje f i g są określone na tym samym zbiorze liczbowym, obie przyjmują tylko dodatnie wartości i każda z nich jest funkcją rosnącą, to iloczyn tych funkcji jest też funkcją rosnącą.*

Twierdzenie 4-6 *Jeżeli funkcje f i g są określone na tym samym zbiorze liczbowym i każda z nich jest funkcją malejącą, to suma tych funkcji jest też funkcją malejącą.*

Twierdzenie 4-7 *Jeżeli funkcje f i g są określone na tym samym zbiorze liczbowym, obie przyjmują tylko wartości dodatnie i każda z nich jest funkcją malejącą, to iloczyn tych funkcji jest też funkcją malejącą.*

4.64. Dane są trzy funkcje f, g i h ze zbioru $\mathbb{R}$ w zbiór $\mathbb{R}$:
a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 27$, b) $g(x) = x^3 + 13$, c) $h(x) = \frac{1}{2^x - 4}$.
Udowodnij, że każda z tych funkcji jest różnowartościowa. Do każdej z nich znajdź funkcję odwrotną.

□ Różnowartościowość funkcji f, gdzie $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 27$, wynika z rozwiązania zadania 4.58

Aby udowodnić, że funkcja jest różnowartościowa wystarczy wykazać, że jest ona malejąca albo rosnąca. Warunkiem wystarczającym na to, aby funkcja była różnowartościowa, jest to, aby ta funkcja była ściśle monotoniczna. Czy jest to zarazem warunek konieczny?

4.12. Funkcje liczbowo-liczbowe ograniczone

Definicja 4-30 Funkcję liczbowo-liczbową $f: X \longrightarrow Y$ nazywamy:

— *ograniczoną od dołu*, jeśli $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall x \in X : [f(x) \geqslant a]$;

— *ograniczoną od góry*, jeśli $\exists b \in \mathbb{R}\ \forall x \in X : [f(x) \leqslant b]$;

— *ograniczoną*, jeśli $\exists a \in \mathbb{R}\ \exists b \in \mathbb{R}\ \forall x \in X : [a \leqslant f(x) \leqslant b]$, a więc jeśli jest ograniczona od dołu i zarazem ograniczona od góry.

Funkcja liczbowo-liczbowa $f: X \longrightarrow Y$ jest ograniczona wtedy i tylko wtedy, gdy
$$\exists c \in \mathbb{R}\ \forall x \in X : [|f(x)| \leqslant c].$$

Funkcja liczbowo-liczbowa f jest ograniczona wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór jej wartości jest ograniczony.

Niech W_f będzie wykresem funkcji liczbowo-liczbowej $f: X \longrightarrow Y$.

Funkcja f jest ograniczona od dołu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje prosta $y = a$ (a więc prosta równoległa do osi odciętych), że każdy punkt wykresu leży powyżej tej prostej.

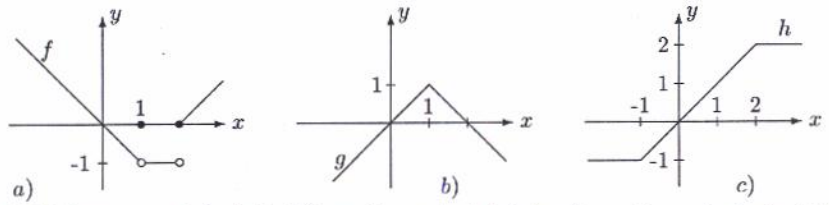
Funkcja f jest ograniczona od góry wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje prosta $y = b$ (a więc prosta równoległa do osi odciętych), że każdy punkt wykresu tej funkcji leży poniżej tej prostej.

Funkcja f jest ograniczona wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją proste $y = a$ i $y = b$ $(a < b)$, a więc proste równoległe do osi odciętych, że każdy punkt wykresu tej funkcji leży powyżej prostej $y = a$ i równocześnie poniżej prostej $y = b$.

1. Wykres funkcji ograniczonej od dołu leży całkowicie nad pewną prostą równoległą do osi odciętych.

2. Wykres funkcji ograniczonej od góry leży całkowicie pod pewną prostą równoległą do osi odciętych.

3. Wykres funkcji ograniczonej leży całkowicie pomiędzy dwiema prostymi równoległymi do osi odciętych.



Rys. 42 Wykresy trzech funkcji: f (ograniczonej od dołu), g (ograniczonej od góry) i h (ograniczonej)

Rysunek 42 prezentuje wykresy trzech funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x < 1, \\ 0 & \text{dla } x = 1, \\ -1 & \text{dla } 1 < x < 2, \\ x-2 & \text{dla } x \geqslant 2; \end{cases} \qquad g(x) = -|x-1|+1 \text{ oraz } h(x) = max\{x, -1, 2\}.$$

Funkcja f jest ograniczona od dołu, wykres tej funkcji leży np. nad prostą $y = -\pi$. Funkcja g jest ograniczona od góry, jej wykres leży pod prostą $y = \sqrt{2}$. Funkcja h jest ograniczona, bo jest ograniczona od dołu i od góry. Wykres funkcji h leży między prostymi $y = -\frac{3}{2}$ i $y = \frac{5}{2}$. Te własności funkcji f, g i h ukazuje rysunek 42.

4.65. Wykaż, że funkcja $f(x) = |x|$ dla $x \in \mathbb{R}$ jest ograniczona od dołu i nie jest ograniczona od góry. Skorzystaj z rysunku 36 przy doborze środków argumentacji.

4.66. Funkcja liczbowo-liczbowa f zadana jest przepisem: $f(x) = min\{-1, x^2, \pi\}$ dla $x \in \mathbb{R}$. Czy jest to funkcja ograniczona od dołu? Czy jest to funkcja ograniczona od góry? Czy jest to funkcja ograniczona? Naszkicuj wykres tej funkcji. Znajdź zbiór jej wartości. Czy jest to funkcja monotoniczna?

4.67. Rozstrzygnij, czy funkcja $f(x) = max\{\pi, |x|\}$ jest ograniczona.

4.68. Dla każdej z niżej określonych funkcji liczbowo-liczbowych rozstrzygnij, czy jest ona ograniczona od góry, czy jest ograniczona od dołu i czy jest ograniczona:
a) $f: \mathbb{N}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ i $f(x) = \frac{1}{x}$, b) $g: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ i $g(x) = \frac{1}{x}$, c) $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $h(x) = x - [x]$.

4.69. Załóżmy, że funkcje liczbowo-liczbowe f i g ze zbioru X w zbiór Y są ograniczone. Zbadaj, czy są ograniczone funkcje:
a) $h_1(x) = f(x) + g(x)$, b) $h_2(x) = f(x) \cdot g(x)$,
c) $h_3(x) = |f(x)|$, d) $h_4(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, jeśli dla każdego $x \in X$ jest $g(x) \neq 0$.

4.13. Funkcje liczbowo-liczbowe parzyste i funkcje nieparzyste

Definicja 4-31 [FUNKCJA PARZYSTA] Funkcję liczbowo-liczbową $f: X \longrightarrow Y$ nazywamy *parzystą*, jeśli:

$$\forall x : [(x \in X) \Longrightarrow (-x \in X)] \quad \wedge \quad \forall x \in X : [f(-x) = f(x)].$$

Definicja 4-32 [FUNKCJA NIEPARZYSTA] Funkcję liczbowo-liczbową $f : X \longrightarrow Y$ nazywamy *nieparzystą*, jeśli:

$$\forall x : [(x \in X) \Longrightarrow (-x \in X)] \ \wedge \ \forall x \in X : [f(-x) = -f(x)].$$

Warunki w obu definicjach mają prostą interpretację geometryczną.

Układ warunków w definicji 4-31 orzeka, że

— punkt 0 na osi odciętych jest środkiem symetrii dziedziny funkcji parzystej f i

— wykres funkcji parzystej f jest symetryczny względem osi odciętych (oś odciętych jest dla tego wykresu osią symetrii).

Układ warunków w definicji 4-32 orzeka, że

— punkt 0 na osi odciętych jest środkiem symetrii dziedziny funkcji nieparzystej f i

— wraz z punktem (x_0, y_0) do wykresu W_f funkcji f należy również punkt $(-x_0, -y_0)$,

początek układu zaś jest środkiem odcinka o końcach w punktach (x_0, y_0) i $(-x_0, -y_0)$. Początek układu jest zatem środkiem symetrii wykresu funkcji nieparzystej.

■ Funkcja $f(x) = 3x^2 + 13$ dla $x \in \mathbb{R}$ jest parzysta, bo

$$f(-x) = 3(-x)^2 + 13 = 3x^2 + 13 = f(x) \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R}.$$

■ Funkcja $f(x) = -3x^3$ dla $v \in \mathbb{R}$ jest nieparzysta, bo

$$f(-x) = -3(-x)^3 = 3x^3 = -(-3x^3) = -f(x) \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R}.$$

4.70. Załóżmy, że dziedziną funkcji liczbowo-liczbowej f jest zbiór X, spełniający warunek: $\forall x : [(x \in X) \Longrightarrow (-x \in X)]$. Rozstrzygnij, czy prawdziwe są implikacje:
a) *„jeżeli taka funkcja f nie jest parzysta, to jest nieparzysta"*,
b) *„jeśli taka funkcja f nie jest nieparzysta, to jest parzysta"*.
Uzasadnij odpowiedź.

4.71. Rozważmy dwie funkcje ze zbioru $\mathbb{R}$ w zbiór $\mathbb{R}$: $f(x) = \frac{1}{x}$ oraz $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Naszkicuj wykresy tych funkcji. Wykaż, że obie są funkcjami nieparzystymi.

□ Wykres funkcji f mamy na rysunku 56, a funkcji g na rysunku 57 (zob. s. 83).

4.72. Udowodnij, że
a) funkcja $f(x) = |x|$ dla $x \in \mathbb{R}$ jest parzysta,
b) funkcja $g(x) = sgn(x)$ jest nieparzysta.

4.73. Udowodnij, że funkcja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = x + \frac{1}{x}$ jest nieparzysta.

4.74. Rozstrzygnij, czy funkcja Dirichleta (określona na s. 51) jest funkcją parzystą.

4.75. Udowodnij, że funkcja $f(x) = log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ jest parzysta.

4.76. Dane są następujące funkcje liczbowo-liczbowe:
a) $f(x) = x^4 - 7x^2 + \pi$, b) $g(x) = 2^x + 2^{-x}$, c) $h(x) = \frac{\sin x}{x^3}$.
Wykaż, że każda z tych funkcji jest parzysta.

4.77. Udowodnij, że każda z niżej określonych funkcji liczbowo-liczbowych jest nieparzysta: a) $f(x) = 3^x - 3^{-x}$, b) $g(x) = x \cdot |x|$, c) $h(x) = \frac{2+x^2}{x^5}$.

4.78. Załóżmy, że a, b i c są ustalonymi liczbami rzeczywistymi oraz $f(x) = ax^2 + bx + c$. Dla jakich a, b i c funkcja f jest parzysta? Czy istnieją takie a, b i c, przy których funkcja f jest nieparzysta?

4.79. Dane są funkcje liczbowo-liczbowe f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 i f_6, gdzie:

a) $f_1(x) = x^2 + 17$,

b) $f_2(x) = |x| + 17$,

c) $f_3(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ \pi & \text{dla } x = 0; \end{cases}$

d) $f_4(x) = \begin{cases} x^3 & \text{dla } x \neq 0, \\ 17 & \text{dla } x = 0; \end{cases}$

e) $f_5(x) = x^3$,

f) $f_6(x) = \begin{cases} x^2 \ dla\ x \neq 0, \\ 17 \ dla\ x = 0. \end{cases}$

Dziedziną każdej z tych funkcji jest zbiór $\mathbb{R}$. Która z nich jest parzysta a która nieparzysta? Czy są to funkcje różnowartościowe? A monotoniczne?

4.80. Funkcja liczbowo-liczbowa $f: X \longrightarrow Y$ jest parzysta, funkcja liczbowo-liczbowa $g: X \longrightarrow Y$ jest nieparzysta. Rozstrzygnij, która z poniższych funkcji jest parzysta a która nieparzysta:

a) $h_1(x) = f(x+5)$, b) $h_2(x) = g(x+5)$, c) $h_3(x) = f(x) + |g(x)|$,
d) $h_4(x) = f(x) \cdot g(x)$, e) $h_5(x) = f(x) \cdot |g(x)|$.

4.81. Dane są funkcje ze zbioru $\mathbb{R}$ w zbiór $\mathbb{R}$:

a) $f_1(x) = |x - c| + |c + 1|$,

b) $f_2(x) = |cx + 1| \cdot |2x - c|$,

c) $f_3(x) = x^2 + (c-2)x + c + 1$.

Dla każdego $j = 1, 2, 3$ rozstrzygnij, czy istnieje taka wartość c, dla której funkcja f_j jest parzysta. Czy istnieje takie c, przy którym funkcja f_j jest nieparzysta?

4.82. Dziedziną funkcji liczbowo-liczbowej f jest zbiór $A \subset \mathbb{R}$, niepusty i taki, że $\forall x : [(x \in A) \Longrightarrow (-x \in A)]$. Rozważmy nowe funkcje $f_j : A \longrightarrow \mathbb{R}$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ określone za pomocą funkcji f następująco (por. zadanie 4.54):

a) $f_1(x) = f(-x)$, b) $f_2(x) = |f(x)|$, c) $f_3(x) = |f(x)| + 1$,
d) $f_4(x) = f(|x|)$, e) $f_5(x) = |f(|x|)|$, f) $f_6(x) = |-f(-x)|$.

Czy wśród funkcji f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 i f_6 jest funkcja parzysta? Czy jest wśród nich funkcja nieparzysta?

4.83. Udowodnij następujące twierdzenia dotyczące parzystości i nieparzystości sumy i iloczynu dwu funkcji:

1. Jeżeli f i g są funkcjami liczbowo-liczbowymi określonymi na tym samym zbiorze X i obie są parzyste, to:

a) funkcja $f + g$ jest także parzysta oraz

b) funkcja $f \cdot g$ jest także parzysta.

2. Jeżeli f i g są funkcjami liczbowo-liczbowymi określonymi na tym samym zbiorze X i obie są nieparzyste, to:

c) funkcja $f + g$ jest także nieparzysta,

d) funkcja $f \cdot g$ jest funkcją parzystą.

4.14. Funkcje liczbowo-liczbowe okresowe

Definicja 4-33 [FUNKCJA OKRESOWA] Funkcję liczbowo-liczbową $f: X \longrightarrow Y$ nazywamy *okresową*, jeśli istnieje taka liczba rzeczywista $t \neq 0$, że:

$$\forall x : [(x \in X) \Longrightarrow (x + t \in X)] \quad \text{i} \quad \forall x \in X : [f(x + t) = f(x)].$$

Liczbę t nazywamy *okresem funkcji* f.

4.84. Udowodnij, że funkcja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ taka, że $f(x) = x - [x]$ jest funkcją okresową.

□ Funkcja f, o której mowa w zadaniu, przypisuje każdej liczbie rzeczywistej x jej mantysę. Jest to funkcja okresowa o okresie $t = 1$, bo dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi:

$$f(x + 1) = x + 1 - [x + 1] = x + 1 - ([x] + 1) = x + 1 - [x] - 1 = x - [x] = f(x).$$

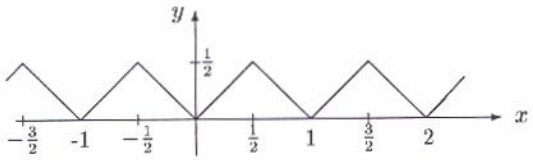
Wykres tej funkcji f prezentuje rysunek 40. W jaki sposób postać tego wykresu może sugerować, że funkcja jest okresowa?

4.85. Dla każdej z poniższych funkcji liczbowo-liczbowych rozstrzygnij, czy jest ona okresowa. Jeśli funkcja jest okresowa, to znajdź jej okres.

a) $f(x) = \sin x$, b) $g(x) = \sin(x + 17)$, h) $h(x) = 2 \sin x$.

4.86. Na zbiorze $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych określamy funkcję f następującym słownym opisem: *„$f(x)$ jest odległością liczby x od najbliższej liczby całkowitej"*. Sprawdź, że $f(x) = min\{x - [x], -[-x] - x\}$, gdzie $[x]$ oznacza cechę liczby rzeczywistej x. Znajdź $f(-\pi), f(-\sqrt{2}), f(\sqrt{2}), f(0), f(\pi), f(\frac{17}{5}), f(2\pi)$. Naszkicuj wykres tej funkcji f. Wykaż, że f jest funkcją okresową.

□ Jest: $f(0) = 0, f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $f(1) = 0$, $f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}$. Wykres funkcji f mamy na rysunku 43.



Rys. 43 Wykres funkcji $f(x) = min\{x - [x], -[-x] - x\}$

4.87. Niech $g(x) = -[-x] - [x]$ dla $x \in \mathbb{R}$. Oblicz $g(-\sqrt{13}), g(-\frac{7}{3}), g(0), g(\sqrt{2}), g(\pi)$. Naszkicuj wykres tej funkcji g. Czy g jest funkcją okresową? Odpowiedź uzasadnij.

□ Mamy tu:

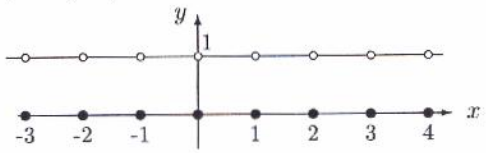
$g(0) = 0$,

$g(\frac{1}{2}) = -[-\frac{1}{2}] - [\frac{1}{2}] = -(-1) - 0 = 1$,

$g(1) = -[-1] - [1] = 1 - 1 = 0$,

$g(\frac{3}{2}) = -[-\frac{3}{2}] - [\frac{3}{2}] = -(-2) - 1 = 2 - 1 = 1$,

$g(\pi) = -[-\pi] - [\pi] = -(-4) - 3 = 4 - 3 = 1$.



Rys. 44 Wykres funkcji $g(x) = -[-x] - [x]$ z zadania 4.87

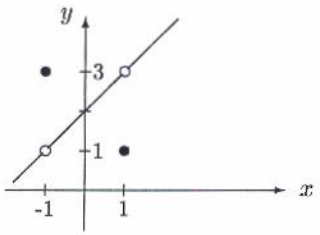
4.88. Wróćmy do funkcji Dirichleta określonej na s. 51. Wykaż, że każda liczba rzeczywista różna od zera jest okresem tej funkcji D.

4.15. Zadania różne

4.89. Funkcja liczbowo-liczbowa f określona jest na zbiorze $\mathbb{R}$ następującym przepisem wieloczłonowym:

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{dla} \quad x \neq -1 \ i \ x \neq 1, \\ 3 & \text{dla} \quad x = -1, \\ 1 & \text{dla} \quad x = 1. \end{cases}$$

Naszkicuj wykres tej funkcji f. Udowodnij, że funkcja f jest różnowartościowa. Czy jest ona bijekcją ze zbioru $\mathbb{R}$ na zbiór $\mathbb{R}$?



Rys. 45 Wykres funkcji f z zadania 4.89

4.90. Dane są dwie funkcje liczbowo-liczbowe ze zbioru $\mathbb{R}$ w zbiór $\mathbb{R}$:

a) $g(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x+2} & \text{dla} \quad x \neq -2, \\ 2 & \text{dla} \quad x = -2; \end{cases}$ b) $h(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{dla} \quad x < 0, \\ x & \text{dla} \quad 0 \leqslant x < 1, \\ 2x-1 & \text{dla} \quad x \geqslant 1. \end{cases}$

Wykaż, że funkcja g jest bijekcją. Rozstrzygnij, czy jest bijekcją funkcja h.

4.91. Dana jest funkcja liczbowo-liczbowa f określona wzorem wieloczłonowym:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla} \quad x < 1, \\ 3 & \text{dla} \quad x = 1, \\ x^2+2x+1 & \text{dla} \quad x > 1. \end{cases}$$

Naszkicuj wykres funkcji f. Czy funkcja f jest różnowartościowa. Określ zbiór $f(\mathbb{R})$, tj. zbiór wartości funkcji f.

4.92. Dane są trzy funkcje liczbowo-liczbowe określone następująco:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{dla} \quad x < 0, \\ x^2+1 & \text{dla} \quad x \geqslant 0; \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x-1} & \text{dla} \quad x \neq 1, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 1; \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{dla} \quad x < 0, \\ x^2+1 & \text{dla} \quad x \geqslant 0. \end{cases}$$

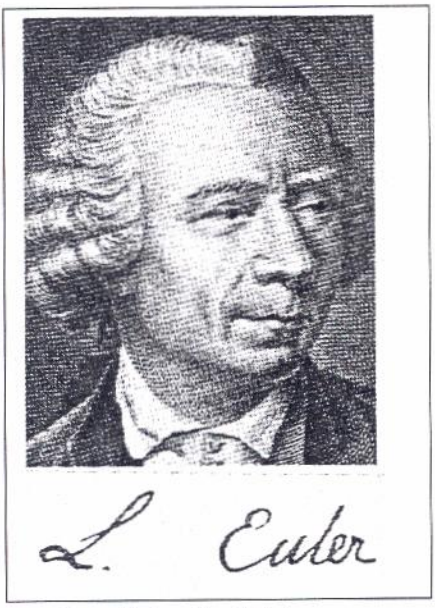
Czy jest wśród nich injekcja? Czy jest wśród nich surjekcja? Czy któraś jest bijekcją? Znajdź zbiór wartości każdej z tych funkcji. Która z nich ma miejsca zerowe? Czy jest

wśród nich funkcja ograniczona? Określ zbiory: $A = \{x \in D_f : -1 < f(x) \leqslant 1\}$, $B = \{x \in D_g : 1 < |g(x)| < 2\}$ i $C = \{x \in D_h : h(x) > 2\}$.
Opisz, jak znaleźć te zbiory korzystając z wykresów funkcji f, g i h?

4.93. Funkcja f określona jest na zbiorze $\mathbb{R}$ wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad x \leqslant 0, \\ x^2 + 1 & \text{dla} \quad x > 0. \end{cases}$$

Naszkicuj wykres funkcji f. Zbadaj, czy jest to funkcja różnowartościowa. Znajdź zbiór wartości tej funkcji. Niech $A = [-1, 1)$. Określ zbiór $f(A)$.



Rys. 46 Leonhard Euler (1707-1783)

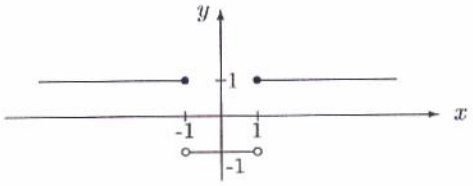


Rys. 47 Pierre de Fermat (1601-1665)

4.94. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla} \quad |x| < 1, \\ 1 & \text{dla} \quad |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

Naszkicuj wykres tej funkcji. Czy jest to funkcja parzysta? Czy jest to funkcja ograniczona? Czy jest to funkcja monotoniczna? Niech $A = (-\sqrt{\pi}, \sqrt{17})$. Znajdź $f(A)$.



Rys. 48 Wykres funkcji f z zadania 4.94

Z wykresu funkcji f (zob. rysunek 48) wynika, że funkcja f:
— jest ograniczona, bo jej wykres leży między prostymi $y = -2$ i $y = 2$,
— jest parzysta, bo oś rzędnych jest osią symetrii tego wykresu,

— nie jest monotoniczna (rysunek sugeruje, jak uzasadnić ten fakt, a więc, jak skonstruować kontrprzykład).

4.95. Dany jest trójkąt równoramienny o ramieniu x i kącie prostym przy wierzchołku. Objętość stożka powstałego przez obrót tego trójkąta wzdłuż jego osi symetrii (wysokości) jest funkcją v zmiennej x. Wykaż, że $v(x) = \frac{1}{12}\sqrt{2}\pi x^3$.



Rys. 49 Damy grające w trzy kości. Francuska rycina z końca XVII w.

5. Funkcje elementarne, równania i nierówności

5.1. Funkcje elementarne

Definicja 5-1 Rozważmy cztery szczególne funkcje ze zbioru $\mathbb{R}$ w zbiór $\mathbb{R}$:

$f_1(x) = b$ (*funkcja stała*),
$f_2(x) = x$ (*funkcja tożsamościowa*),
$f_3(x) = a^x$ (*funkcja wykładnicza*),
$f_4(x) = \sin x$ (*funkcja trygonometryczna*),

gdzie a i b są ustalonymi liczbami rzeczywistymi i $a > 0$ i $a \neq 1$. Każdą funkcję, która da się określić za pomocą tych czterech funkcji i działań: dodawania, mnożenia, dzielenia, odwracania i składania funkcji, nazywamy *funkcją elementarną*.

■ Funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = 2x^2 - 3x + 13$ jest funkcją elementarną.

■ Określona na s. 51 funkcja Dirichleta nie jest funkcją elementarną.

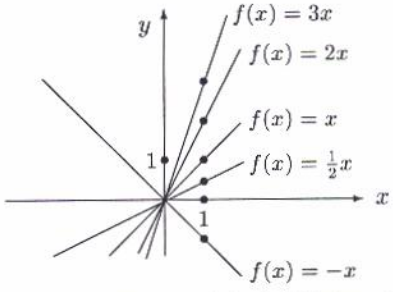
5.2. Funkcja liniowa

Definicja 5-2 [FUNKCJA LINIOWA] Załóżmy, że a i b są ustalonymi liczbami rzeczywistymi. Funkcję $f(x) = ax + b$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, nazywamy *funkcją liniową*.

Wykresem funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ jest prosta. Jest $f(0) = b$, a zatem prosta ta przecina oś rzędnych w punkcie b. Jeśli $b = 0$, to prosta ta przechodzi przez początek układu.

1° Jeżeli $a = 0$, to funkcja liniowa jest funkcją stałą. Jej wykresem jest prosta równoległa do osi odciętych i przecinająca oś rzędnych w punkcie b.

2° Załóżmy, że $a \neq 0$. W tym przypadku $f(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = \frac{-b}{a}$. Jeśli $a \neq 0$, to miejscem zerowym funkcji f jest liczba $\frac{-b}{a}$. Oznacza to, że prosta, która jest wykresem tej funkcji, przecina oś odciętych w punkcie $\frac{-b}{a}$. Na rysunku 50 przedstawiono wykresy kilku funkcji $f(x) = ax$. Ten rysunek ukazuje, jak zmienia się kierunek prostej w zależności od a.



Rys. 50 Wykresy pewnych funkcji liniowych

5.1. Naszkicuj wykresy następujących funkcji liniowych:
a) $f(x) = -2x + 1$, b) $g(x) = 3x$, c) $h(x) = \frac{4x-5}{2}$.

5.2. Określ funkcję liniową $f(x) = ax + b$, wiedząc, że $f(-5) = -1$ i $f(1) = 1$.

5.3. Wykresem funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ jest prosta na płaszczyźnie kartezjańskiej przechodząca przez punkty: $(-1, -1)$ i $(5, 1)$. Znajdź liczby a i b.

5.4. Dana jest funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ $(x \in \mathbb{R})$. Wykaż, że:
a) jeżeli $a > 0$, to f jest funkcją rosnącą,
b) jeżeli $a < 0$, to f jest funkcją malejącą

5.3. Równanie liniowe

Definicja 5-3 [RÓWNANIE LINIOWE] Funkcję zdaniową dwóch zmiennych x i y postaci $ax + by = c$, gdzie a, b, c są ustalonymi liczbami rzeczywistymi i której dziedziną jest zbiór $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, nazywamy *równaniem liniowym o dwóch niewiadomych*. Każdą parę liczb (x_0, y_0) spełniającą tę funkcję zdaniową nazywamy *pierwiastkiem równania*, a zbiór wszystkich pierwiastków równania nazywamy *jego rozwiązaniem*. Jeśli zbiór pierwiastków równania jest pusty, to mówimy, że *równanie jest sprzeczne*. Rozwiązać równanie oznacza znaleźć jego rozwiązanie.

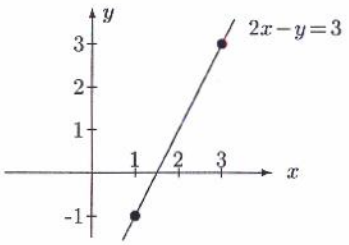
Pierwiastek (x_0, y_0) równania $ax + by = c$ możemy interpretować jako punkt płaszczyzny kartezjańskiej. W tej geometrycznej interpretacji rozwiązanie równania liniowego jest pewnym podzbiorem płaszczyzny kartezjańskiej.

— Jeśli $a^2 + b^2 > 0$, tj. przynajmniej jedna z liczb a lub b nie jest zerem, to rozwiązaniem równania $ax + by = c$ jest prosta. Aby ją wyznaczyć wystarczy znaleźć jej dwa punkty.

— Jeśli $a = b = c = 0$, to każda para (x, y) spełnia funkcję zdaniową $ax + by = c$, a więc jest pierwiastkiem równania. Rozwiązaniem równania jest w tym przypadku cała płaszczyzna kartezjańska.

— Jeśli $a = b = 0$ i $c \neq 0$, to rozwiązaniem równania jest zbiór pusty (równanie jest sprzeczne).

■ Rozważmy równanie liniowe $2x - y = 3$. Para $(1, -1)$ jest pierwiastkiem tego równania. Aby znaleźć pozostałe jego pierwiastki wystarczy przyjąć za x dowolną liczbę rzeczywistą $\overline{x}$ i wyliczyć dla jakiego $\overline{y}$ zachodzi równość $a\overline{x} + b\overline{y} = c$. Dla $\overline{x} = 3$ jest $2 \cdot 3 - \overline{y} = 3$, czyli $6 - \overline{y} = 3$, czyli $-\overline{y} = 3 - 6$ a więc $\overline{y} = 3$. Para $(3, 3)$ jest także pierwiastkiem równania $2x - y = 3$. Wszystkie pierwiastki równania $2x - y = 3$ są (w interpretacji geometrycznej) punktami prostej L, która przechodzi przez punkty $(1, -1)$ i $(3, 3)$ (zob. rysunek 51). I każdy punkt prostej L przedstawia pierwiastek tego równania. Sprawdź, że punkt $(2, 1)$ leży na prostej L. Para $(2, 1)$ jest pierwiastkiem owego równania. Prostą L nazywamy wykresem równania $2x - y = 3$.

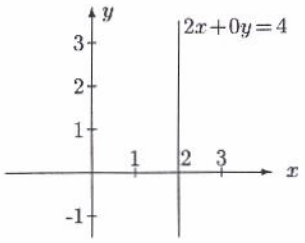


Rys. 51 Prosta jako rozwiązanie równania liniowego $2x - y = 3$

Wykresem każdego równania liniowego $ax + by = c$, gdzie $a^2 + b^2 > 0$, jest prosta. Równanie liniowe $ax + by = c$ nazywamy wówczas *równaniem tej prostej*. Każdą prostą na płaszczyźnie kartezjańskiej możemy utożsamiać z jej równaniem.

5.5. Naszkicuj prostą, która jest rozwiązaniem równania $2x - 3y = 2$.

■ Równaniem liniowym jest także funkcja zdaniowa $2x + 0y = 4$. Wykresem tego równania liniowego jest prosta na rysunku 52.



Rys. 52 Prosta jako wykres równania $2x + 0y = 4$

5.6. Pierwiastkami równania liniowego $a_1x + b_1y = c_1$ są pary $(-1,-1)$ i $(\pi,0)$. O jakim równaniu liniowym tu mowa? Pierwiastkami równania $a_2x + b_2y = c_2$ są pary $(-13,\pi)$ i $(-13,\sqrt{2})$. Znajdź to równanie.

5.7. Sporządź wykres funkcji $f(x) = |2x + 12| - 22$ dla $x \in \mathbb{R}$. Sprawdź, że rozwiązaniem nierówności $|2x + 12| - 22 \leqslant 0$ jest przedział $[-17, 5]$.

5.4. Macierze, macierze jednostkowe

Definicja 5-4 [MACIERZ] Niech $a_{jk} \in \mathbb{R}$ dla $j \in \{1,2,\ldots n\}$ oraz $k \in \{1,2,\ldots,m\}$, gdzie n i m są ustalonymi liczbami naturalnymi większymi od 1. Zapiszmy liczby a_{jk} w układzie n wierszy i m kolumn tak, aby liczba a_{jk} znajdowała się w j-tym wierszu i k-tej kolumnie:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Układ $n \times m$ liczb zapisanych w n wierszach i m kolumnach nazywa się *macierzą prostokątną o wymiarach* $n \times m$. Gdy $n = m$, to taki układ liczb nazywamy *macierzą kwadratową stopnia* n. Liczby a_{jk} nazywamy *wyrazami macierzy*.

Macierz, o której mowa w definicji, zapisujemy symbolem $[a_{jk}]$ lub oznaczamy literą Q. Mamy tu $Q = [a_{jk}]$. Niżej mamy trzy macierze o wyrazach ze zbioru $\mathbb{Z}$:
— macierz Q_1 kwadratową stopnia 2,
— macierz Q_2 prostokątną o dwu wierszach i trzech kolumnach, czyli macierz o wymiarach 2×3
— macierz Q_3 prostokątną o 3 wierszach i czterech kolumnach, czyli macierz o wymiarach 3×4:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 15 \\ 5 & 6 & 27 \end{bmatrix}, \quad Q_3 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 11 \\ 3 & -2 & 4 & 11 \end{bmatrix}.$$

Definicja 5-5 [MACIERZ JEDNOSTKOWA] Macierz $[a_{jk}]$ kwadratową stopnia n, gdzie

$$a_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{dla } j = k, \\ 0 & \text{dla } j \neq k, \end{cases} \quad \text{gdzie } j, k = 1, 2, \ldots n,$$

nazywamy *macierzą jednostkową stopnia n*. Wyrazy na głównej przekątnej macierzy jednostkowej są równe 1, pozostałe są równe 0.

■ Oto dwie macierze jednostkowe: Q_1 stopnia 2 i Q_2 stopnia 3:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.5. Operacje elementarne na macierzach

Niech $Q = [a_{jk}]$ będzie macierzą prostokątną o n wierszach i m kolumnach. Wyróżnimy trzy operacje na macierzy Q:

[$m1$] Wyrazy dowolnego wiersza macierzy Q mnożymy przez tę samą liczbę rzeczywistą różną od zera (mówimy krócej, że wiersz macierzy mnożymy przez liczbę różną od zera).

[$m2$] Do wyrazów ustalonego wiersza dodajemy odpowiednie wyrazy innego wiersza. Mówimy inaczej, że do dowolnego wiersza dodajemy inny wiersz.

[$m3$] Przestawiamy ze sobą dwa dowolne wiersze.

Niech w_j oznacza j-ty wiersz macierzy Q. Symbolem $r \cdot w_j$ oznaczmy operację mnożenia j-tego wiersza macierzy Q przez liczbę rzeczywistą r (operacja [$m1$]). Symbolem $w_j + r \cdot w_k$ oznaczamy dalej operację dodawania do wiersza w_j wiersza w_k pomnożonego przez liczbę r (operacje [$m1$] i [$m2$]). Operację zamiany wierszy w_j i w_k oznaczamy symbolem $w_j \leftrightarrow w_k$ (operacja [$m3$]).

■ Rozważmy cztery następujące macierze prostokątne:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix}, \quad Q_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$Q_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Macierz Q_2 powstała z macierzy Q_1 przez dodanie do drugiego jej wiersza iloczynu pierwszego wiersza przez (-4) (operacja: $w_2 + (-4) \cdot w_1$). Macierz Q_3 powstała z macierzy Q_2 przez pomnożenie jej drugiego wiersza przez liczbę $(-\frac{1}{3})$ (jest to operacja: $(-\frac{1}{3} \cdot w_2)$. Mnożąc drugi wiersz macierzy Q_3 przez (-2) i dodając ten wiersz do pierwszego (operacja: $w_1 + (-2) \cdot w_2$) dostajemy macierz Q_4.

5.6. Macierze nieosobliwe

Definicja 5-6 [MACIERZ NIEOSOBLIWA] Jeśli poprzez operacje elementarne na macierzy kwadratowej Q stopnia n da się ją przeprowadzić w macierz jednostkową stopnia n, to Q nazywamy *macierzą nieosobliwą*.

5.8. W ciągu $(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5)$ poniższych macierzy, każda następna powstała z poprzedniej przez wykonanie operacji elementarnych. Opisz te kolejne przejścia od macierzy Q_j do macierzy Q_{j+1} dla $j = 1, 2, 3, 4$.

□ Mamy tu

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad Q_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$Q_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad Q_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zauważ, że Q_5 jest macierzą jednostkową. Jest to więc protokół z ciągu operacji elementarnych na kolejnych macierzach, które wyjściową macierz Q_1 doprowadziły do macierzy jednostkowej. Macierz Q_1 jest zatem macierzą nieosobliwą.

5.9. Wykaż, że każda z poniższych macierzy jest nieosobliwa.

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}, \quad Q_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

5.7. Wyznacznik macierzy stopnia 2

Definicja 5-7 [WYZNACZNIK MACIERZY STOPNIA 2] Rozważmy macierz:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

gdzie $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ są dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Różnicę $a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$ nazywamy *wyznacznikiem macierzy stopnia 2* i zapisujemy w postaci:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

■ Mamy zatem

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1 \cdot \beta_2 - a_2 \cdot \beta_1, \quad \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 5 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = (-6) \cdot \tfrac{1}{2} - 5 \cdot 2 = -13.$$

Zauważ, że na zbiorze macierzy stopnia 3 określiliśmy funkcję, która każdej macierzy stopnia 3 przypisuje liczbę, zwaną jej wyznacznikiem.

5.10. Oblicz wyznaczniki następujących macierzy stopnia 2:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 17 & 1 \\ 34 & 2 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 35 \end{bmatrix}, \quad Q_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ -5 & 2 \end{bmatrix},$$

$$Q_4 = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad Q_5 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad Q_6 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \pi \\ \pi & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Sprawdź, że macierze, dla których wyznacznik jest równy zero, nie dadzą się sprowadzić do macierzy jednostkowej. Sprawdź, że macierze, których wyznacznik jest różny od zera, są nieosobliwe.

Twierdzenie 5-1 *Macierz stopnia 2 jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy jej wyznacznik jest różny od zera.*

5.8. Układy równań liniowych na płaszczyźnie kartezjańskiej

Definicja 5-8 [UKŁAD DWÓCH RÓWNAŃ LINIOWYCH NA PŁASZCZYŹNIE] Funkcję zdaniową postaci

$$(a_1x + b_1y = c_1) \wedge (a_2x + b_2y = c_2),$$

gdzie a_1, b_1, c_1 i a_2, b_2, c_2 są ustalonymi liczbami rzeczywistymi i której dziedziną jest zbiór $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, nazywamy *układem dwóch równań liniowych o dwóch niewiadomych x i y*. Każdą parę (x_0, y_0) spełniającą tę funkcję zdaniową, czyli dla której $(a_1x_0 + b_1y_0 = c_1) \wedge (a_2x_0 + b_2y_0 = c_2)$ jest zdaniem prawdziwym, nazywamy *pierwiastkiem układu równań*, a zbiór pierwiastków układu równań nazywamy *jego rozwiązaniem*. Jeśli zbiór pierwiastków układu równań jest pusty, to mówimy, że *układ równań jest sprzeczny*. Rozwiązać układ równań oznacza znaleźć jego rozwiązanie.

Układ równań liniowych $(a_1x+b_1y = c_1) \wedge (a_2x+b_2y = c_2)$ jest koniunkcją dwóch funkcji zdaniowych, którą zapisujemy w formie:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1, \\ a_2x + b_2y &= c_2. \end{aligned}$$

Jeśli
— pierwsze równanie pomnożymy stronami przez b_2, drugie zaś przez $(-b_1)$ i dodamy stronami a następnie
— do pierwszego równania pomnożonego przez $(-a_2)$ dodamy drugie pomnożone przez a_1,
to dostajemy układ równań

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1 \quad \text{i} \quad (a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1.$$

Jeśli $(a_1b_2 - a_2b_1) \neq 0$, to mamy

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \text{i} \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Każde równanie tego układu U dwóch równań liniowych o dwóch niewiadomych przedstawia prostą na płaszczyźnie kartezjańskiej. Pierwiastkiem układu jest w tej interpretacji układu punkt wspólny obu tych prostych. Warunek $(a_1b_2 - a_2b_1) \neq 0$ orzeka, że wspomniane proste nie są równoległe. Proste te przecinają się w punkcie o współrzędnych

$$\left(\frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right).$$

Liczniki i mianowniki we wzorach na pierwiastek układu U mają szczególną postać. Rozważmy w tym kontekście cztery macierze

$$Q_U = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \quad Q_x = \begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix} \quad Q_y = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

Zauważ, że:

1) Macierz Q_U jednoznacznie określa układ U dwóch równań liniowych. Mówimy, że Q_U jest *macierzową prezentacją układu* U. Wyrazy w pierwszej kolumnie tej macierzy są współczynnikami przy niewiadomej x, wyrazy drugiej kolumny są współczynnikami przy niewiadomej y, trzecia kolumna jest utworzona z wyrazów wolnych.

2) Wyrazami macierzy Q są współczynniki przy niewiadomych. Jest to tzw, *macierz główna* układu U.

3) Macierz Q_x powstała z macierzy Q przez zastąpienie kolumny współczynników przy zmiennej x kolumną wyrazów wolnych.

4) Macierz Q_y powstała z macierzy Q przez zastąpienie kolumny współczynników przy niewiadmej y kolumną wyrazów wolnych.

Układ U ma rozwiązanie jeśli $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Zauważ, że

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Układ U ma zatem dokładnie jeden pierwiastek, jeśli wyznacznik macierzy głównej tego układu jest różny od zera.

Definicja 5-9 Jeśli wyznacznik macierzy głównej układu U dwóch równań liniowych o dwóch niewiadomych jest różny od zera, to U nazywamy *układem Cramera*[4].

Zauważ, że

$(c_1b_2 - c_2b_1)$ jest wyznacznikiem macierzy Q_x, a
$(a_1c_2 - a_2c_1)$ jest wyznacznikiem macierzy Q_y.

Mamy zatem ciekawy związek między pierwiastkiem układu U a wyznacznikami jego macierzy Q, $_x$ i Q_y:

$$x = \frac{|Q_x|}{|Q|} \quad \text{i} \quad y = \frac{|Q_y|}{|Q|}.$$

Powyższe wzory na pierwiastek układu Cramera noszą nazwę *wzorów Cramera.*

5.11. Dla jakiej wartości parametru α układ równań

$$6(\alpha)^2x - 3y = 3\alpha \quad \text{i} \quad 2x - y = 7,$$

jest układem Cramera. Korzystając ze wzorów Cramera znajdź pierwiastek tego układu.

5.12. Pozostańmy przy układzie U dwu równań liniowych o dwu niewiadomych. Załóżmy, że $|Q| = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$. Jakie wnioski na temat rozwiązania tego układu wynikają z tego faktu, jeśli ponadto:

a) $|Q_x| = 0$ i $|Q_y| = 0$,

b) $|Q_x| \neq 0$ lub $|Q_y| \neq 0$?

□ Jeśli $|Q| = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ i $|Q_x| = 0$ i $|Q_y| = 0$, to każda para liczb rzeczywistych spełniająca jedno z tych równań spełnia także i drugie równanie. Wykresem obu równań tego układu jest wtedy ta sama prosta.

□ Jeżeli $|Q| = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ i $|Q_x| \neq 0$ lub $|Q_y| \neq 0$, to układ nie ma pierwiastków (układ jest sprzeczny). Proste o takich równaniach są równoległe (nie mają wspólnego punktu).

[4]Gabriel Cramer (1704-1752), matematyk szwajcarski.

5.13. Znajdź macierze Q, Q_x i Q_y oraz ich wyznaczniki, jeśli U jest następującym układem dwóch równań liniowych o dwóch niewiadomych:

$$\begin{aligned} 7x - 3y &= 15 \\ 5x + 6y &= 27. \end{aligned}$$

Rozwiąż ten układ równań. Przedstaw ten układ U za pomocą macierzy Q_U.

□ Na s. 67 zaprezentowano macierze Q_1, Q_2 i Q_3. Zauważ, że Q_2 jest macierzą prezentującą rozważany teraz układ U a Q_1 jest macierzą współczynników. Mamy tu

$$|Q| = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 7 \cdot 6 - 5 \cdot (-3) = 57 \neq 0,$$

$$|Q_x| = \begin{vmatrix} 15 & -3 \\ 27 & 6 \end{vmatrix} = 15 \cdot 6 - 27 \cdot (-3) = 171,$$

$$|Q_y| = \begin{vmatrix} 7 & 15 \\ 5 & 27 \end{vmatrix} = 7 \cdot 27 - 15 \cdot 5 = 114,$$

a zatem układ ma jeden pierwiastek (x_0, y_0), gdzie

$$x_0 = \frac{|Q_x|}{|Q|} = \frac{171}{57} = 3 \quad \text{oraz} \quad y_0 = \frac{|Q_y|}{|Q|} = \frac{114}{57} = 2.$$

5.14. Rozwiąż za pomocą wyznaczników następujące układy równań:

a) $\begin{aligned} 2x + 3y &= -4 \\ 5x + 6y &= -7, \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x + 2y &= 2 \\ 2x + 4y &= 1, \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} \tfrac{1}{3}(2x - 3 + y) - \tfrac{1}{4}(x - 2y + 3) &= 4 \\ \tfrac{1}{4}(3x - 4y + 3) + \tfrac{1}{3}(4x - 2y - 9) &= 4. \end{aligned}$

5.15. Wiadomo, że wykres funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ przechodzi przez punkty $(2, 1)$ i $(4, 3)$. Określ tę funkcję.

□ Punkt (x_0, y_0) należy do wykresu funkcji f, jeśli $x_0 \in D_f$ (D_f jest dziedziną funkcji f) i $y_0 = f(x_0)$. Dostajemy zatem układ dwóch warunków, jaki muszą spełniać nieznane a i b:

$$\begin{aligned} 1 &= 2a + b \\ 3 &= 4a + b. \end{aligned}$$

Ten układ równań ma jeden pierwiastek $(1, -1)$, a więc w zadaniu mowa jest o funkcji $f(x) = x - 1$.

5.16. Dla jakiej liczby naturalnej n układ równań

$$\begin{aligned} 2nx - 3ny &= 7 \\ nx - y &= 5 \end{aligned}$$

ma pierwiastek dokładnie jeden pierwiastek (x_0, y_0) i taki, że $x_0 > 0$ i $y_0 > 1$?

5.17. Dla jakich wartości parametru α układ równań liniowych

$$\begin{aligned} x - 2y &= 3 \\ x + \alpha y &= 4 \end{aligned}$$

nie posiada pierwiastków (jest sprzeczny)?

5.9. Układ równań liniowych i jego macierzowa prezentacja

Definicja 5-10 [UKŁAD RÓWNAŃ LINIOWYCH] Funkcję zdaniową postaci

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_+ \cdots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_+ \cdots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_+ \cdots + a_{nm}x_m &= b_n. \end{aligned}$$

gdzie a_{jk} dla $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ oraz $k = 1, 2, 3, \ldots, m$ jest ustaloną liczbą rzeczywistą i której dziedziną jest zbiór $\mathbb{R}^m$, nazywamy *układem n równań liniowych o m niewiadomych* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$.

[PIERWIASTEK UKŁADU RÓWNAŃ] Każdy ciąg liczb $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \ldots, \overline{x}_m)$ spełniający tę funkcję zdaniową, nazywamy *pierwiastkiem układu równań*, a zbiór wszystkich pierwiastków układu równań nazywamy *jego rozwiązaniem*. Jeśli zbiór pierwiastków układu równań jest pusty, to mówimy, że *układ równań jest sprzeczny*.

Rozwiązać układ równań oznacza znaleźć jego rozwiązanie.

[RÓWNOWAŻNE UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH] Dwa układy równań liniowych nazywamy *równoważnymi*, jeśli zbiory ich pierwiastków są równe.

W kontekście powyższego układu U n równań liniowych o m niewiadomych rozważmy macierz o n wierszach i $(m + 1)$ kolumnach:

$$Q_U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{bmatrix}.$$

Ta macierz Q_U jest pewną prezentacją układu U równań liniowych. Wyrazy w pierwszej kolumnie tej macierzy są współczynnikami przy niewiadomej x_1, wyrazy drugiej kolumny są współczynnikami przy niewiadomej x_2 i ogólnie – wyrazy w k-tej kolumnie są współczynnikami przy niewiadomej x_k. Ostatnia kolumna jest utworzona z wyrazów po prawych stronach równań tego układu (nazywamy je wyrazami wolnymi). Opisana macierz jednoznacznie określa układ równań U. Mówimy tu o tzw. *macierzowej prezentacji układu równań liniowych*.

[UKŁAD JEDNORODNY] Jeśli kolumna wyrazów wolnych w macierzy Q_U składa się z samych zer, to układ U nazywamy *jednorodnym*.

[MACIERZ GŁÓWNA UKŁADU RÓWNAŃ] Macierz utworzoną z m początkowych kolumn macierzy Q_U nazywa się *macierzą główną*, albo *macierzą współczynników przy niewiadomych*.

Mamy (znane ze szkoły) trzy *elementarne operacje* na równaniach, które prowadzą od układu równań do układu z nim równoważnego:

[$u1$] mnożenie stronami jednego z równań przez tę samą liczbę rzeczywistą różną od zera;

[$u2$] dodawanie stronami do jednego z równań innego równania tego układu;

[$u3$] przestawianie miejscami dowolnych dwu równań w tym układzie.

5.10. Metoda eliminacji Gaussa

Rozważmy układ U n równań liniowych o n niewiadomych:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_+ \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_+ \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\

I. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 30 \\ 1 & 2 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$ $\frac{1}{2} \cdot w_1$: $\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 15 \\ 1 & 2 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$;

II. $w_2 + (-1) \cdot w_1$ oraz $w_3 + (-3) \cdot w_1$: $\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 15 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -20 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & -49 \end{bmatrix}$;

III. $2 \cdot w_2$ oraz $2 \cdot w_3$: $\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 15 \\ 0 & 1 & -5 & -40 \\ 0 & -7 & -7 & -98 \end{bmatrix}$;

IV. $w_1 + (-\frac{3}{2}) \cdot w_2$: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 75 \\ 0 & 1 & -5 & -40 \\ 0 & -7 & -7 & -98 \end{bmatrix}$;

V. $w_3 + 7 \cdot w_2$: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 75 \\ 0 & 1 & -5 & -40 \\ 0 & 0 & -42 & -378 \end{bmatrix}$;

VI. $(-\frac{1}{42}) \cdot w_3$: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 75 \\ 0 & 1 & -5 & -40 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}$;

VII. $w_2 + 5 \cdot w_3$: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 75 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}$;

VIII. $w_1 + (-8) \cdot w_3$: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}$.

Ostatnia macierz prezentuje (równoważny z wyjściowym układem U) następujący układ równań:

$$\begin{aligned} x + 0y + 0z &= 3 \\ 0x + y + 0z &= 5 \\ 0x + 0y + z &= 9, \end{aligned}$$

a zatem trójka $(3, 5, 9)$ jest pierwiastkiem wyjściowego układu trzech równań o trzech niewiadomych. Jest to jedyny pierwiastek, bo macierz główna tego układu jest macierzą nieosobliwą (udało nam się doprowadzić ją do macierzy jednostkowej), a więc wyjściowy układ jest układem Cramera.

5.18. Metodą eliminacji Gaussa rozwiąż następujący układ równań:

$$\begin{aligned} x_1 + 8x_2 + 5x_3 &= 32 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 13 \\ 4x_1 + 6x_2 + x_3 &= 19. \end{aligned}$$

Z rozwiązania zadania 5.9 (zob. s. 69) wynika, że jest to układ Cramera.

5.19. Z rozwiązania zadania 5.9 wynika, że poniższy układ równań liniowych jest układem Cramera.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Rozwiąż ten układ metodą eliminacji Gaussa.

Metoda eliminacji Gaussa pozwala także rozstrzygać, że układ n równań liniowych o n niewiadomych jest sprzeczny.

5.20. Dany jest układ trzech równań o trzech niewiadomych:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 6 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 &= 16. \end{aligned}$$

Wykorzystując metodę eliminacji Gaussa wykaż, że ten układ jest sprzeczny.

□ Macierzowa prezentacja tego układu U jest następująca:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 16 \end{bmatrix}.$$

Stosując operacje elementarne (opisz je) dostajemy kolejno macierze:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & 10 \\ 0 & -6 & -12 & -12 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Układ U jest zatem równoważny z układem:

$$\begin{aligned} x_1 + 0x_2 - 1x_3 &= -\tfrac{8}{3} \\ 0x_1 + x_2 + 2x_3 &= \tfrac{10}{3} \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 8, \end{aligned}$$

który jest sprzeczny. Sprzeczny jest zatem również wyjściowu układ U.

5.21. Metodą eliminacji Gaussa rozwiąż następujące układy jednorodne:

$$\begin{aligned} -3x + 6y &= 0 \\ x + 5y &= 0, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y + 3z &= 0 \\ 2x + 3y + 4z &= 0 \\ 3x + 4y + 6z &= 0. \end{aligned}$$

Czy znalezione rozwiązanie obu równań można uzyskać inaczej, wiedząc jedynie, że macierze główne tych układów są nieosobliwe?

□ Układy równań, o których mowa w zadaniu, oznaczmy następująco:
U_2: układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi,
U_3: układ trzech równań o trzech niewiadomych.

Oba są układami jednorodnymi, bo kolumna wyrazów wolnych składa się z samych zer. Pierwiastkiem układu U_2 jest para $(0,0)$, pierwiastkiem układu U_3 jest trójka $(0,0,0)$. Są to tzw. *pierwiastki zerowe*. Każdy jednorodny układ równań ma pierwiastek zerowy.

Macierz główna układu U_2 jest macierzą Q_2 z zadania 5.9 na s. 69. Z rozwiązania tego zadania wynika, że jest ona nieosobliwa. Układ U_2 jest więc układem Cramera, a zatem ma dokładnie jeden pierwiastek (por. twierdzenie 5-2). Wynika stąd, że para $(0,0)$ jest jedynym pierwiastkiem układu U_2.

Z rozwiązania zadania 5.8 (por. s. 69) wynika, że macierz główna układu U_3 jest nieosobliwa. Także układ U_3 jest układem Cramera, a więc ma tylko jeden pierwiastek. Pierwiastkiem układu U_3 jest trójka $(0,0,0)$, a zatem ten pierwiastek zerowy jest jedynym pierwiastkiem układu U_3. Te rozważania podsuwają ideę dowodu następującego twierdzenia:

Twierdzenie 5-3 *Jeśli układ n równań o n niewiadomych jest jednorodny i macierz główna tego układu jest nieosobliwa (a więc jest to układ Cramera), to ten układ ma dokładnie jeden pierwiastek i jest nim ciąg n zer (a więc jest to pierwiastek zerowy).*

5.22. Sprawdź, że oprócz pierwiastka zerowego, pierwiastkami układu równań

$$\begin{aligned} 2x - 4y &= 0 \\ -4x - 8y &= 0 \end{aligned}$$

są także pary: $(4,2)$, $(10,5)$, $(2\pi,\pi)$. Określ zbiór wszystkich pierwiastków (a więc rozwiązanie) tego jednorodnego układu równań liniowych.

Układ jednorodny może mieć zatem także pierwiastki niezerowe. Zbiór pierwiastków takiego układu może być nieskończony.



Rys. 53 Carl Friedrich Gauss (1777-1855)



Rys. 54 Pierre Simon Laplace (1749-1827)

5.11. Funkcja kwadratowa. Równania i nierówności kwadratowe

Definicja 5-12 [FUNKCJA KWADRATOWA] Funkcję $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie a, b, c są ustalonymi liczbami rzeczywistymi i $a \neq 0$, określoną na zbiorze $\mathbb{R}$, nazywamy *funkcją kwadratową*, albo *trójmianem kwadratowym*. Wyrażenie $\Delta = b^2 - 4ac$ nazywa się *wyróżnikiem tego trójmianu*.

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola. Jest $f(0) = c$, a zatem wykres tej funkcji przecina oś rzędnych w punkcie c.

Definicja 5-13 [RÓWNANIE KWADRATOWE] Funkcję zdaniową jednej zmiennej x postaci $ax^2+bx+c = 0$, gdzie $a \neq 0$ i $x \in \mathbb{R}$, nazywamy *równaniem kwadratowym z jedną niewiadomą*. *Pierwiatkiem równania kwadratowego* nazywamy każdą liczbę rzeczywistą x_0 spełniającą tę funkcję zdaniową, a więc dla której zdanie $a(x_0)^2 + bx_0 + c = 0$ jest prawdziwe. Zbiór wszystkich pierwiastków równania kwadratowego nazywamy jego *rozwiązaniem*.

■ Funkcja zdaniowa $x^2 + x - 2 = 0$ jest równaniem kwadratowym, którego pierwiastkiem jest liczba $x_0 = 1$. Nietrudno sprawdzić, że rozwiązaniem tego równania kwadratowego jest zbiór $\{1, -2\}$.

Poszukiwanie miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2+bx+c$, gdzie $a \neq 0$ i $x \in \mathbb{R}$, sprowadza się do rozwiązywania równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$. Zauważ, że

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{c}{a}) = a[x^2 + 2\tfrac{b}{2a}x + (\tfrac{b}{2a})^2 - (\tfrac{b}{2a})^2 + \tfrac{c}{a}] =$$
$$a[(x + \tfrac{b}{2a})^2 - \tfrac{b^2-4ac}{4a^2}] = a[(x + \tfrac{b}{2a})^2 - \tfrac{\Delta}{4a^2}].$$

Jest więc $ax^2 + bx + c = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]$. Jest to tzw. *postać kanoniczna trójmianu kwadratowego* $ax^2 + bx + c$. Mamy więc

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff a[(x + \tfrac{b}{2a})^2 - \tfrac{\Delta}{4a^2}] = 0$$

Miejsca zerowe funkcji kwadratowej f są więc pierwiastkami równania

$$a[(x + \tfrac{b}{2a})^2 - \tfrac{\Delta}{4a^2}] = 0.$$

1° Załóżmy, że $\Delta > 0$. Jest wówczas
$a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}] = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})^2] = a(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a})(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}) =$
$a(x + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a})(x + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a})$. Ostatni iloczyn przyjmie wartość 0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x + \tfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \text{ lub } x + \tfrac{b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 0,$$

czyli gdy

$$x = \tfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ lub } x = \tfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Jeśli $\Delta > 0$, to równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ ma dwa pierwiastki

$$x_1 = \tfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{i} \quad x_2 = \tfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Są to zarazem miejsca zerowe funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$, a więc punkty, w których wykres funkcji f (a jest nim parabola) przecina oś odciętych.

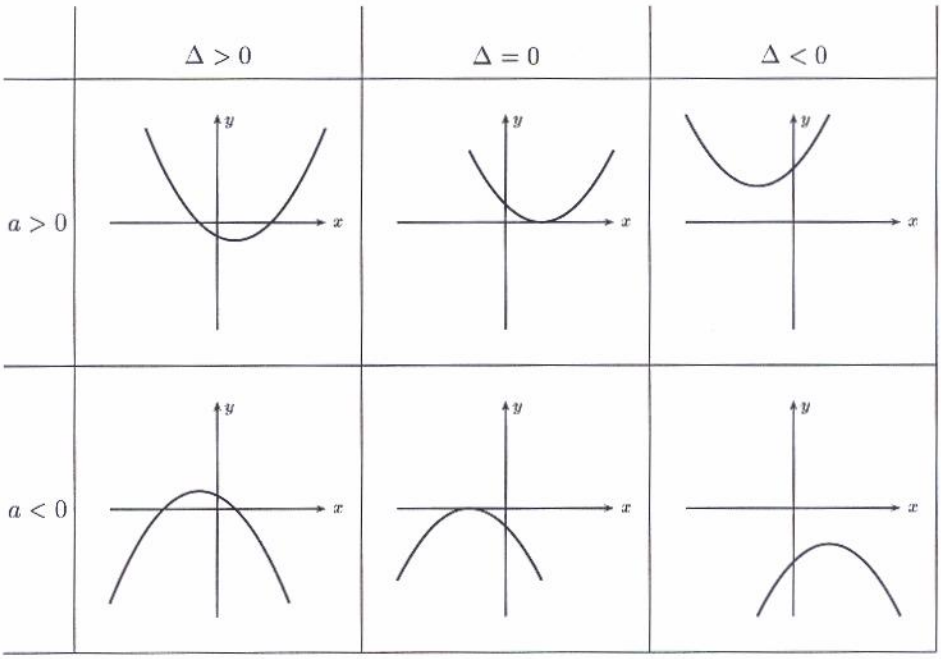
2° Załóżmy, że $\Delta = 0$. W tym przypadku

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff a(x + \tfrac{b}{2a})^2 = 0 \iff (x + \tfrac{b}{2a}) = 0,$$

czyli istnieje jeden pierwiastek $x = -\frac{b}{2a}$. Funkcja kwadratowa ma wówczas jedno miejsce zerowe, a więc jej wykres ma z osią odciętych dokładnie jeden wspólny punkt. Jest to zarazem punkt styczności tego wykresu z osią odciętych, a więc wierzchołek paraboli.

3° Jeśli $\Delta < 0$, to $a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}] \neq 0$, czyli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ nie ma pierwiastków (jest sprzeczne), funkcja kwadratowa nie ma wówczas miejsc zerowych. Oznacza to, że wykres funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ nie przecina osi odciętych, leży zatem całkowicie nad tą osią (gdy $a > 0$, albo pod nią (gdy $a < 0$).

Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + bx + c$ jest parabola. Rysunek 55 ukazuje, jak jej położenie na płaszczyźnie kartezjańskiej zależy od liczb a i Δ.



Rys. 55 Położenie wykresu funkcji kwadratowej w zależności od a i Δ

5.23. Wykaż, że wierzchołek wykresu funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ jest punktem o współrzędnych (x_w, y_w), gdzie $x_w = -\frac{b}{2a}$ i $y_w = -\frac{\Delta}{4a}$.

5.24. [WZORY VIÉTE'A] Niech $f(x) = ax^2 + bx + c$. Załóżmy, że $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ oraz, że x_1 i x_2 są miejscami zerowymi funkcji f. Wykaż, że $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ i $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. Są to tzw. *wzory Viéte'a*[5].

[5]François Viéte (1540-1603), matematyk francuski.

5.25. Naszkicuj wykres funkcji kwadratowej:
a) $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2$ b) $g(x) = (\frac{1}{2}9x-1)^2+1$ c) $h(x) = (x-2)^2+1$.

5.26. Niech $f(x) = \alpha x^2 - (\alpha+4)x + \alpha + \frac{5}{2}$ i $g(x) = (\alpha+1)x^2 - 4\alpha x + 2\alpha + 3$. Dla jakich wartości parametru α funkcja f ma dwa miejsca zerowe? Dla jakich α ma dwa miejsca zerowe funkcja g?

5.27. Sprowadź do postaci kanonicznej trójmian kwadratowy $3x^2 - 2x - 1$.

5.28. Niech $f(x) = (4\alpha+1)x^2 - (4\alpha-11)x + \alpha - 1$ dla $x \in \mathbb{R}$. Dla jakiej wartości parametru α jest to funkcja kwadratowa mająca tylko jedno miejsce zerowe?

5.29. Dla jakich wartości parametru α równanie $x^2 - 2\alpha x + 4\alpha - 3 = 0$ ma dwa pierwiastki?

Definicja 5-14 [NIERÓWNOŚĆ KWADRATOWA] Niech ax^2+bx+c będzie trójmianem kwadratowym (jest więc $a \neq 0$ i $x \in \mathbb{R}$). Każdą z następujących funkcji zdaniowych jednej zmiennej x:

$$ax^2+bx+c > 0, \quad ax^2+bx+c < 0, \quad ax^2+bx+c \geqslant 0, \quad ax^2+bx+c \leqslant 0,$$

nazywamy *nierównością kwadratową z jedną niewiadomą. Pierwiastkiem nierówności kwadratowej* nazywamy każdą liczbę rzeczywistą x_0, dla której ta nierówność jest zdaniem prawdziwym, a więc liczbę spełniającą tę nierówność.

■ Nierównością kwadratową jest funkcja zdaniowa $x^2 + x - 2 < 0$. Pierwiatkiem tej nierówności jest liczba $x_0 = -1$. Nietrudno sprawdzić, że rozwiązaniem tej nierówności jest przedział liczbowy $(-2, 1)$.

5.30. Rozwiąż nierówności: a) $x^2-4x+12 > 0$, b) $x^2+4x+4 > 0$, c) $x^2-7x+12 > 0$, d) $x^2+10x+3 < 0$, e) $x^2-6x+20 < 0$.

□ Funkcja kwadratowa $f(x) = x^2-4x+12$ nie ma miejsc zerowych ($\Delta = 16-48 < 0$). Wykresem tej funkcji jest parabola, która nie przecina osi odciętych, a ponieważ $a = 1 > 0$, parabola ta jest skierowana ramionami ku górze, czyli cała leży nad osią odciętych. Oznacza to, że $f(x) > 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Rozwiązaniem nierówności $x^2 - 4x + 12 > 0$ jest zatem zbiór $\mathbb{R}$.

5.12. Wielomiany

Definicja 5-15 [WIELOMIAN] Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną ($n \in \mathbb{N}$). *Wielomianem stopnia* n nazywamy funkcję

$$w(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} \cdot + a_1 x^1 + a_0,$$

gdzie $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ są ustalonymi liczbami rzeczywistymi i $a_n \neq 0$.

Funkcja liniowa $f(x) = ax + b$, gdzie $a \neq 0$ i $x \in \mathbb{R}$, jest wielomianem stopnia 1. Nazywa się go *dwumianem*. Funkcja kwadratowa jest wielomianem stopnia 2, który nazywamy *trójmianem kwadratowym.*

Twierdzenie 5-4 [TWIERDZENIE BEZOUTA] *Liczba r jest miejscem zerowym wielomianu*

$$w(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} \cdot + a_1 x^1 + a_0$$

wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian ten jest podzielny przez $(x-r)$.

Twierdzenie 5-5 *Niech $a_j \in \mathbb{Z}$ dla $j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ i $a_n = 1$. Każde całkowite miejsce zerowe wielomianu $w(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_1x^1 + a_0$ jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0.*

Wniosek: *Jeżeli żaden z dzielników wyrazu wolnego a_0 wielomianu $w(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} \cdot + a_1x^1 + a_0$ nie jest jego miejscem zerowym, to ten wielomian nie ma całkowitych miejsc zerowych.*

■ Dzielnikami wyrazu wolnego wielomianu $w(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$ są liczby 1 i (-1). Sprawdź, że $w(-1) = w(1) = 0$, a więc obie te liczby są miejscami zerowymi tego wielomianu. Są to jedyne jego całkowite miejsca zerowe. Wielomian w dzieli się zatem przez dwumian $(x-1)$ i przez dwumian $(x+1)$.

5.31. Wykaż, że równanie $x^3 + x^2 + x - 2 = 0$ nie ma pierwiastków w zbiorze $\mathbb{Z}$ liczb całkowitych.

□ Pierwiastki równania, o którym mowa w zadaniu, są miejscami zerowymi wielomianu $w(x) = x^3 + x^2 + x - 2$. Dzielnikami wyrazu wolnego wielomianu w, tj. liczby (-2), są liczby: $1, -1, 2, -2$. Sprawdź, że żadna z tych liczb nie jest miejscem zerowym wielomianu w. Wśród liczb całkowitych nie ma więc pierwiastków równania $w(x) = 0$.

■ Jeśli $w(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$ i $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, to wielomian ma dwa miejsca zerowe

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{(por. s. 79)}.$$

Wielomian w daje się wówczas rozłożyć na czynniki, tzn. przedstawić w postaci iloczynu i

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a})(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}).$$

Jeśli $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, to

$$ax^2 + bx + c = a[x - (-\frac{b}{2a})]^2.$$

Sprawdź, że $2x^2 + 8x - 10 = 2(x-1)(x+5)$ i że $2x^2 + 28x + 98 = 2(x+7)^2$.

5.13. Równania algebraiczne

Definicja 5-16 [RÓWNANIE ALGEBRAICZNE] Funkcję zdaniową zmiennej x postaci

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} \cdot + a_1x^1 + a_0 = 0,$$

gdzie $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ są ustalonymi liczbami rzeczywistymi i $a_n \neq 0$, nazywamy *równaniem algebraicznym*. Liczbę n nazywamy *stopniem równania*. Lewa strona równania algebraicznego stopnia n jest wielomianem w stopnia n. *Pierwiastkiem równania algebraicznego $w(x) = 0$* nazywamy każde miejsce zerowe wielomianu w. *Rozwiązaniem równania $w(x) = 0$* nazywamy zbiór wszystkich jego pierwiastków.

■ Równania liniowe są równaniami algebraicznymi stopnia 1. Każde równanie kwadratowe jest równaniem algebraicznym stopnia 2. Równanie $3x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 1 = 0$ jest równaniem algebraicznym stopnia 4. Równanie $3x^2 + 4x - \sqrt{x} - 2^x = 0$ nie jest równaniem algebraicznym.

Twierdzenie 5-6 *Równanie algebraiczne $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} \cdot + a_1x^1 + a_0 = 0$ może mieć w zbiorze $\mathbb{R}$ co najwyżej n pierwiastków. Jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to istnieje co najmniej jeden pierwiastek tego równania.*

5.32. Rozwiąż równanie algebraiczne $2x^3 + 2x^2 - 15x + 6 = 0$.

□ Rozważmy wielomian $w(x) = 2x^3 + 2x^2 - 15x + 6$. Liczba 2 jest dzielnikiem jego wyrazu wolnego i $w(2) = 0$, a więc 2 jest miejscem zerowym tego wielomianu, czyli pierwiastkiem równania $2x^3+2x^2-15x+6 = 0$. Z twierdzenia 5-4 wynika, że wielomian w jest podzielny przez dwumian $(x - 2)$. Sprawdź, że

$$(2x^3 + 2x^2 - 15x + 6) : (x - 2) = 2x^2 + 6x - 3,$$

a zatem

$$2x^3 + 2x^2 - 15x + 6 = (x - 2)(2x^2 + 6x - 3).$$

Równanie, o którym mowa w zadaniu 5.32, jest zatem równoważne z równaniem

$$(x - 2)(2x^2 + 6x - 3) = 0,$$

a to z kolei jest równoważne z alternatywą

$$(x - 2 = 0) \vee (2x^2 + 6x - 3 = 0).$$

Pierwiastkami równania kwadratowego $2x^2 + 6x - 3 = 0$ są liczby:

$$x_1 = \frac{-6-2\sqrt{15}}{4} \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{-6+2\sqrt{15}}{2}.$$

Rozwiązaniem równania $2x^3 + 2x^2 - 15x + 6 = 0$ jest zbiór $\{2, \frac{-6-2\sqrt{15}}{4}, \frac{-6+2\sqrt{15}}{2}\}$.

5.33. Dla jakich wartości parametru α liczba 1 jest miejscem zerowym wielomianu $f(x) = x^3 + (\alpha^2 - 1)x^2 + (3\alpha - 1)x + 1$?

5.34. Rozwiąż równania algebraiczne:
a) $x^8 - 16 = 0$, b) $24x^3 - 2x^2 - 5x + 1 = 0$, c) $(x^2 + x)^2 - 1 = 0$.

5.14. Funkcja wymierna

Definicja 5-17 [FUNKCJA WYMIERNA] Funkcję, która jest ilorazem dwóch wielomianów, nazywamy *funkcją wymierną*.

■ Funkcja f określona wzorem

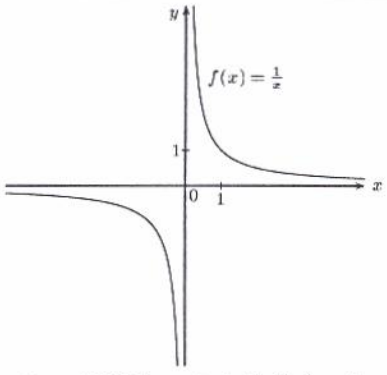
$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 + 2x^2 - x + \pi},$$

jako iloraz dwu wielomianów: $w_1(x) = x^2 + 1$ i $w_2(x) = x^3 + 2x^2 - x + \pi$, jest funkcją wymierną. Funkcja wymierna f jest określona dla wszsytkich liczb rzeczywistych x oprócz tych, które są miejscami zerowymi wielomianu w_2, a więc które są pierwiastkami równania $x^3 + 2x^2 - x + \pi = 0$.

■ Funkcją wymierną jest każda z trzech funkcji f, g i h, gdzie

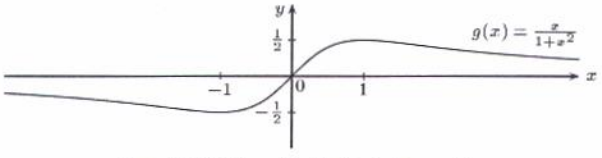
$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \frac{x}{1+x^2} \quad \text{i} \quad h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Wykres funkcji f przedstawia rysunek 56.



Rys. 56 Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$

Rysunek 57 przedstawia wykres funkcji wymiernej $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$. O funkcjach f i g mowa jest w zadaniu 4.71 na s. 59.

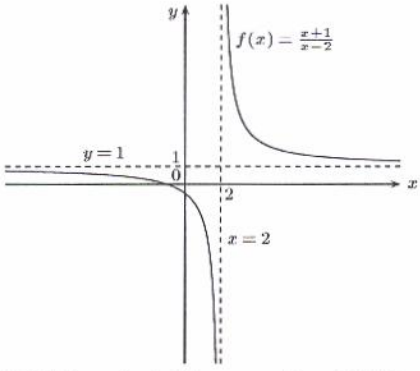


Rys. 57 Wykres funkcji $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$

■ Funkcja $f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$ jest funkcją elementarną, ale nie jest to funkcja wymierna, nie jest bowiem ilorazem dwóch wielomianów.

Definicja 5-18 [FUNKCJA HOMOGRAFICZNA] Funkcja $h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $c \neq 0$, $a \cdot d - b \cdot c \neq 0$ i $x \neq -\frac{d}{c}$, nazywa się *funkcją homograficzną*.

Wykresem funkcji homograficznej jest krzywa zwana *hiperbolą*. Rysunek 58 przedstawia wykres funkcji homograficznej $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$.



Rys. 58 Wykres funkcji homograficznej $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

5.35. Określ dziedzinę każdej z poniższych funkcji wymiernych:

$$f(x) = \frac{1}{4x^2-4x+1}, \quad g(x) = \frac{x+4}{x^3-5x+5}, \quad h(x) = \frac{x^2-1}{x^4-1}.$$

5.15. Równania i nierówności wymierne

Definicja 5-19 [RÓWNANIE WYMIERNE I NIERÓWNOŚĆ WYMIERNA] Niech w_1 i w_2 będą wielomianami. Równanie postaci $\frac{w_1(x)}{w_2(x)} = 0$, nazywamy *równaniem wymiernym*. Każdą z nierówności: $\frac{w_1(x)}{w_2(x)} > 0$, $\frac{w_1(x)}{w_2(x)} \geqslant 0$, $\frac{w_1(x)}{w_2(x)} < 0$, $\frac{w_1(x)}{w_2(x)} \leqslant 0$, nazywamy *nierównością wymierną*.

5.36. Rozwiąż nierówność $\frac{3x^2+4x-4}{x^2+x-2} > 1$.

□ Nietrudno sprawdzić, że nierówność $\frac{3x^2+4x-4}{x^2+x-2} > 1$ jest równoważna z nierównością $\frac{2x^2+3x-2}{x^2+x-2} > 0$. Zauważ, że

$$\frac{2x^2+3x-2}{x^2+x-2} > 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } (2x^2+3x-2)(x^2+x-2) > 0.$$

Rozwiązaniem nierówności, o której mowa w zadaniu, jest zbiór

$$(-\infty,-2) \cup (-2,\tfrac{1}{2}) \cup (1,+\infty).$$

5.37. Rozwiąż nierówności: a) $\frac{x^3}{x^3-2x^2-x+2} > 0$, b) $|\frac{2x-3}{x^2-1}| \leqslant 2$.

5.16. Funkcja potęgowa

Niech r będzie ustaloną liczbą rzeczywistą. Wzór $f(x) = x^r$ określa funkcję, której dziedzina a także sens samego wzoru, zależy od tego, jaką liczbą jest r. Przypomnimy zatem definicję potęgi liczby rzeczywistej,

Definicja 5-20 [POTĘGA LICZBY RZECZYWISTEJ] Niech $a \in \mathbb{R}$. *Potęgę liczby a o wykładniku r* oznaczamy przez a^r i określamy następująco (w zależności od tego, jakimi liczbami są a i r):

1) Jeśli $r \in \mathbb{N}_1$, to $a^r := a$, gdy $r = 1$ oraz $a^r := a^{r-1} \cdot a$, gdy $r > 1$ (w tym przypadku a jest dowolną liczbą rzeczywistą).

2) Jeśli $r = 0$ i $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, to $a^r = a^0 := 1$.

3) Jeśli $r \in \{-1,-2,-3,\ldots\}$ i $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, to $a^r := \frac{1}{a^{-r}}$.

4) Jeśli $r = \frac{m}{n}$, $m,n \in \mathbb{N}_1$, $n > 1$ i $a \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, to $a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m}$.

5) Jeśli $r = -\frac{m}{n}$, $m,n \in \mathbb{N}_1$, $n > 1$ i $a \in \mathbb{R}_+$, to $a^r = a^{-\frac{m}{n}} := \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$.

Definicja 5-21 [FUNKCJA POTĘGOWA] Funkcję $f(x) = x^r$, gdzie r jest ustaloną liczbą rzeczywistą i $x \in X$ nazywamy *funkcją potęgową*, przy czym:
$X = \mathbb{R}$ jeśli $r \in \mathbb{N}_1$,
$X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, gdy $r \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$,
$X = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, gdy $r \in \mathbb{Q}_+ \setminus \mathbb{Z}$,
$X = \mathbb{R}_+$, gdy $r \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

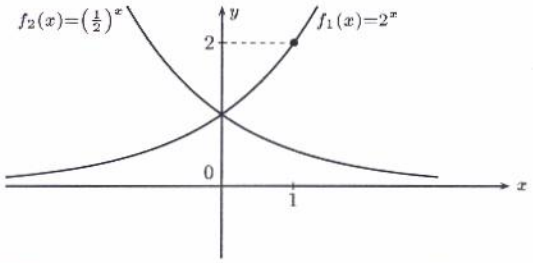
■ Funkcjami potęgowymi są następujące funkcje:
$f(x) = x^3$ dla $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$ dla $x \in \mathbb{R}_+$, $h(x) = \frac{1}{x^2}$ dla $x \in \mathbb{R}_+$.
Naszkicuj wykresy funkcji f, g i h.

5.38. Rozwiąż następujące równania: a) $x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{8}$, b) $x^{\frac{4}{3}} = 3\sqrt[3]{3}$, c) $x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$.

5.17. Funkcja wykładnicza

Definicja 5-22 [FUNKCJA WYKŁADNICZA] Niech a będzie ustaloną liczbą rzeczywistą dodatnią i różną od 1. Funkcję $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem $f(x) = a^x$, nazywamy *funkcją wykładniczą.*

Zbiorem wartości funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ jest zbiór $\mathbb{R}_+$ i
— jeśli $a > 1$, to funkcja wykładnicza f jest rosnąca,
— jeśli $0 < a < 1$, to funkcja wykładnicza f jest malejąca.
Wykresy funkcji wykładniczych $f_1(x) = 2^x$ i $f_2(x) = (\frac{1}{2})^x$ prezentuje rysunek 59.



Rys. 59 Wykresy funkcji wykładniczych $f_1(x) = 2^x$ i $f_2(x) = (\frac{1}{2})^x$

5.39. Niech $f(x) = 2^x$ dla $x \in \mathbb{R}$. Narysuj wykres funkcji $g(x) = -f(x) + 2$ oraz $h(x) = |2 - f(x)|$. Czy funkcje g i h mają miejsca zerowe? Czy są to funkcje różnowartościowe?

5.40. Rozwiąż następujące równania wykładnicze:
a) $25^x - 5^{x+1} + 5 = 5^x$, b) $6^{x+1} + 6^{1-x} = 37$, c) $2^{3x} \cdot 7^{x-2} = 4 \cdot 4^x$.

□ Rozwiążemy równanie $25^x - 5^{x+1} + 5 = 5^x$. Zauważ, że $25^x = (5^2)^x = (5^x)^2$ oraz $5^{x+1} = 5^x \cdot 5$. Niech $5^x = y$. Uwzględniając te fakty dostajemy równanie

$$y^2 - 5y + 5 - y = 0,$$

które ma dwa pierwiastki: $y_1 = 1$ oraz $y_2 = 5$, a zatem $5^x = 1$ lub $5^x = 5$, skąd wynika, że pierwiastkami równania są liczby $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$.

5.41. Rozwiąż nierówności: a) $2^{2x+4} - 4^x > 15$, b) $0 < 3^{x^2-x-6} < 1$.

5.18. Funkcja logarytmiczna

Definicja 5-23 [LOGARYTM] Niech x będzie dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią, a zaś liczbą dodatnią i różną od 1. *Logarytmem liczby x przy podstawie a* nazywamy taką liczbę y, że $a^x = y$. Logarytm liczby x przy podstawie a oznaczamy przez $\log_a x$. Logarytm liczby x przy podstawie 10 zapisujemy krótko $\log x$. Logartym liczby x, którego podstawą jest szczególna liczba niewymierna e (określono ją na s. 108), nazywamy *logarytmem naturalnym liczby x* i oznaczamy $\ln x$.

■ Jest na przykład: $\log 1\,000 = 3$, $\ln e = 1$, $\log e \approx 0.4343$, $\ln 10 \approx 2.3029$.

■ Z definicji $\log_a x$ jest wykładnikiem potęgi, do której należy podnieść liczbę a, aby otrzymać x. Mamy więc $\log_2 8 = 3$, bo $2^3 = 8$. $\log_a 1 = 0$, bo $a^0 = 1$.

Twierdzenie 5-7 *Jeżeli a, b, x i y są liczbami rzeczywistymi oraz $a > 0$ i $a \neq 1$, oraz $x > 0$ i $y > 0$, to*

1) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$,

2) $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$,

3) $\log_a(x^b) = b \cdot \log_a x$.

Czasami trzeba przejść od logarytmu liczby x przy podstawie a do jej logarytmu przy innej podstawie b ($b > 0$ i $b \neq 1$). Niech $y = \log_a x$. Jest więc $x = a^y$.

Rozważmy funkcję $f(x) = \log_b x$. Z fatu, że $x = a^y$ wynika, że $f(x) = f(a^y)$, czyli że $\log_b(x) = \log_b(a^y)$, a stąd, uwzględniając twierdzenie 5-7 (3), dostajemy równość $\log_b x = y \cdot \log_b a$, z której wynika, że

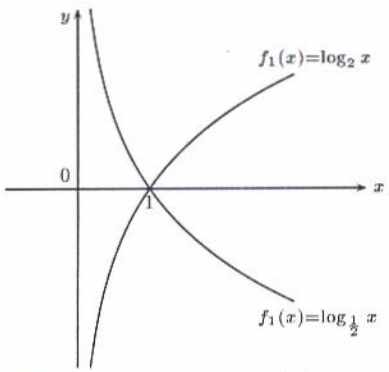
$$\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a.$$

Definicja 5-24 [FUNKCJA LOGARYTMICZNA] Funkcję $f(x) = \log_a x$, gdzie a jest ustaloną liczbą rzeczywistą dodatnią i różną od 1 oraz $x \in \mathbb{R}_+$, nazywamy *funkcją logarytmiczną*. Funkcję $f(x) = \ln x$ $(a = e)$ nazywamy *funkcją logarytm naturalny.*

Miejscem zerowym funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_a x$ jest liczba 1, bo $a^0 = 1$. Funkcja logarytmiczna jest różnowartościowa, a zatem liczba 1 jest jedynym miejscem zerowym tej funkcji.

Twierdzenie 5-8 *Jeżeli $a > 1$, to funkcja $f(x) = \log_a x$ jest rosnąca. Jeśli $0 < a < 1$, to funkcja $f(x) = \log_a x$ jest malejąca.*

Wykresy funkcji logarytmicznych $f_1(x) = \log_2 x$ i $f_2(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ mamy na rysunku 60.



Rys. 60 Wykresy funkcji logarytmicznych $f_1(x) = \log_2 x$ i $f_2(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

5.42. Niech $f(x) = \log_2 x$ dla $x \in \mathbb{R}_+$. Korzystając z wykresu funkcji f naszkicuj wykres funkcji $g(x) = |f(x)|$ oraz $h(x) = -|f(x) + 1| - 2$. Wskaż miejsca zerowe funkcji g i h. Rozwiąż nierówności: a) $f(x) \geqslant 0$, b) $g(x) > 1$, c) $h(x) < -2$.

5.43. Oblicz $|\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}|$, $\log_e \frac{1}{e}$ i $\log_{\frac{1}{\pi}}(\pi^n)$. Jakiego znaku są liczby: $\ln 7$, $\ln \sqrt{2}$, $\log_{\frac{1}{2}} e$, $\ln(\pi - 3,14)$, $\log_\pi(1 + \frac{1}{n})^n$, $\log_{(\pi-3,14)} \frac{1}{\pi}$, $\log_{\sqrt{2}} 16$?

5.44. Rozwiąż równania: a) $\log(3x + 4) + \log(x + 8) = 2$, b) $\frac{\log 2x}{\log(4x-15)} = 2$.

5.45. Niech $f(x) = log_2[(2m-1)x^2 + 2mx - m + 4]$. Dla jakich m dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbb{R}$? Dla jakich m funkcja f przyjmuje wartości ujemne jedynie dla $x \geqslant \frac{5}{2}$?

5.19. Funkcje trygonometryczne

Definicja 5-25 [funkcje trygonometryczne] *Funkcjami trygonometrycznymi zmiennej rzeczywistej* x nazywamy funkcje:
$f_1(x) = \sin x$ dla $x \in \mathbb{R}$ — funkcja *sinus*,
$f_2(x) = \cos x$ dla $x \in \mathbb{R}$ — funkcja *cosinus*,
$f_3(x) = \operatorname{tg} x$ dla $x \in \{x \in \mathbb{R} : (x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi) \wedge k \in \mathbb{Z}\}$ — funkcja *tangens*,
$f_4(x) = \operatorname{ctg} x$ dla $x \in \{x \in \mathbb{R} : (x \neq k \cdot \pi) \wedge k \in \mathbb{Z}\}$ — funkcja *cotangens*.

Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzą nierówności

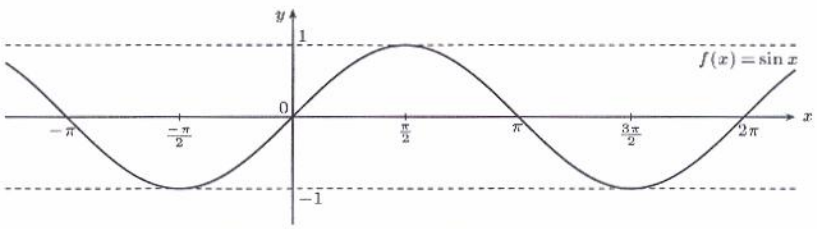
$$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \quad \text{oraz} \quad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1,$$

a więc funkcje f_1 i f_2 są ograniczone.
Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzą równości

$$\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin x \quad \text{oraz} \quad \cos(x + k \cdot 2\pi) = \cos x,$$

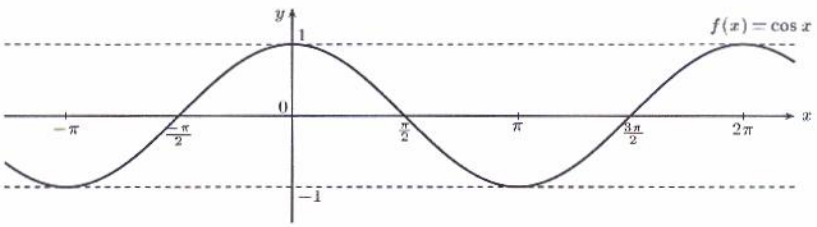
a zatem funkcje f_1 i f_2 są okresowe i okresem jest liczba 2π.
Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ jest $\sin(-x) = \sin x$, a zatem funkcja f_1 jest nieparzysta. Wykres funkcji f_1 przedstawia rysunek 61.

5.46. Określ dziedzinę funkcji $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ oraz funkcji $g(x) = \log_2 |\cos x|$.



Rys. 61 Wykres funkcji $f_1(x) = \sin x$

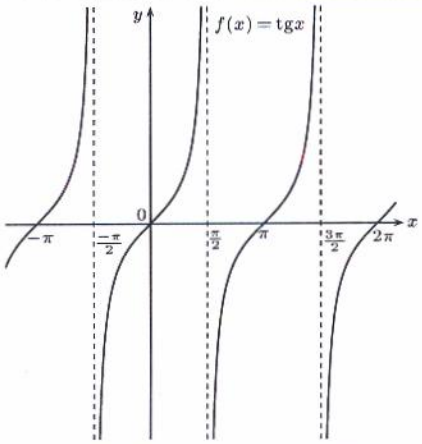
Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $\cos(-x) = \cos x$, a więc f_2 jest funkcją parzystą. Wykres funkcji f_2 prezentuje rysunek 62.



Rys. 62 Wykres funkcji $f_2(x) = \cos x$

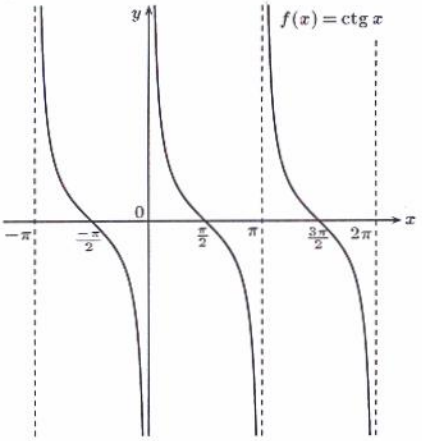
5.47. Naszkicuj wykresy funkcji: $f(x) = |\sin x|$ i $g(x) = -|\cos x| + 1$.

Funkcje f_3 i f_4 są okresowe o okresie π.



Rys. 63 Wykres funkcji $f_3(x) = \operatorname{tg} x$

Wykres funkcji f_3 przedstawia rysunek 63, funkcji f_4 zaś rysunek 64.



Rys. 64 Wykres funkcji $f(x) = \operatorname{ctg} x$

5.48. Naszkicuj wykresy funkcji: $f(x) = |\sin x| + 1$, $g(x) = -\cos(x + \pi)$ i $h(x) = \sin^2 x + \cos^x$.

5.49. Rozwiąż równanie $|2 \sin x| = 1$, a więc rozstrzygnij dla jakich liczb rzeczywistych x funkcja zdaniowa $|2 \sin x| = 1$ jest zdaniem prawdziwym.

5.50. Korzystając z wykresów pewnych funkcji wykaż, że równanie $1 + x^2 - \cos x = 0$ ma tylko jeden pierwiastek i że jest nim $x_0 = 0$.

5.51. Dla jakich wartości parametru a równanie $(\sin x)^2 + \sin x + a = 0$ ma pierwiastki?

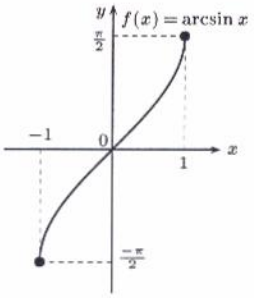
5.20. Funkcje cyklometryczne

Definicja 5-26 [ARKUS SINUS] Funkcja $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie $f(x) = \sin x$, jest różnowartościowa. Funkcję odwrotną do tej funkcji f nazywamy *funkcją arkus sinus* i jej wartość dla liczby x z przedziału $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ oznaczamy $\operatorname{arc\,sin} x$.

Z definicji 5-26 wynika, że

$$(y = \arcsin x) \iff (x = \sin y \wedge y \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]).$$

Wykres funkcji arkus sinus przedstawia rysunek 65.



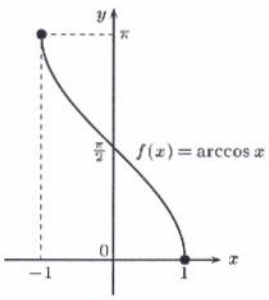
Rys. 65 Wykres funkcji $f(x) = \arcsin x$

Definicja 5-27 [ARKUS COSINUS] Funkcja $f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie $f(x) = \cos x$, jest różnowartościowa. Funkcję odwrotną do tej funkcji f nazywamy *funkcją arkus cosinus* i jej wartość dla liczby x z przedziału $[0, \pi]$ oznaczamy $\arccos x$.

Z definicji 5-27 wynika, że

$$(y = \arccos x) \iff (x = \cos y \wedge y \in [0, \pi]).$$

Wykres funkcji arkus cosinus przedstawia rysunek 66.



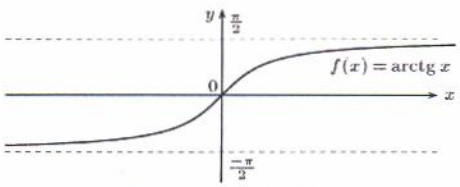
Rys. 66 Wykres funkcji $f(x) = \arccos x$

Definicja 5-28 [ARKUS TANGENS] Funkcja $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie $f(x) = \operatorname{tg} x$, jest różnowartościowa. Funkcję odwrotną do tej funkcji f nazywamy *funkcją arkus tangens* i jej wartość dla liczby x z przedziału $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ oznaczamy $\operatorname{arctg} x$.

Z definicji 5-28 wynika, że

$$(y = \operatorname{arctg} x) \iff (x = \operatorname{tg} y \wedge y \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]).$$

Wykres funkcji arkus tangens przedstawia rysunek 67.



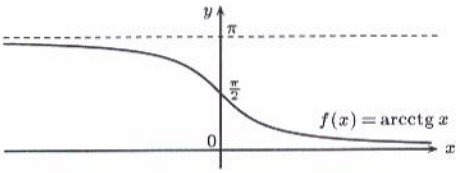
Rys. 67 Wykres funkcji $f(x) = \operatorname{arctg} x$

Definicja 5-29 [ARKUS COTANGENS] Funkcja $f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie $f(x) = \operatorname{ctg} x$, jest różnowartościowa. Funkcję odwrotną do tej funkcji f nazywamy *funkcją arkus cotangens* i jej wartość dla liczby x z przedziału $[0, \pi]$ oznaczamy $\operatorname{arc\,ctg} x$.

Z definicji 5-29 wynika, że

$$(y = \operatorname{arc\,ctg} x) \iff (x = \operatorname{ctg} y \wedge y \in [0, \pi]).$$

Wykres funkcji arkus cotangens przedstawia rysunek 68.



Rys. 68 Wykres funkcji $f(x) = \operatorname{arc\,ctg} x$

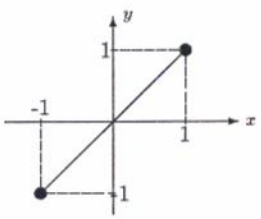
Definicja 5-30 [FUNKCJE CYKLOMETRYCZNE] Funkcje arkus sinus, arkus cosinus, arkus tangens i arkus cotangens nazywamy *funkcjami cyklometrycznymi.*

Twierdzenie 5-9 *Dla każdego* $x \in [-1, 1]$ *jest* $\operatorname{arc\,sin} x + \operatorname{arc\,cos} x = \frac{\pi}{2}$.

Twierdzenie 5-10 *Dla każdego* $x \in \mathbb{R}$ *jest* $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{2}$.

5.52. Oblicz: $\operatorname{arc\,sin} \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{arc\,cos}(-\frac{1}{2})$, $\operatorname{arc\,tg}(-1)$, $\operatorname{arc\,ctg} \sqrt{3}$.

■ Na rysunku 69 mamy wykres funkcji $g : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie $g(x) = \cos(\operatorname{arc\,cos} x)$.



Rys. 69 Wykres funkcji $g(x) = \cos(\operatorname{arc\,cos} x)$

5.53. Naszkicuj wykres funkcji f, gdzie $f(x) = \operatorname{arc\,cos}(\sin x)$.

6. Ciągi nieskończone jako szczególne funkcje

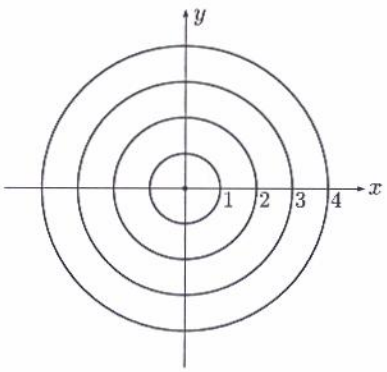
6.1. Definicja ciągu

Definicja 6-1 [CIĄG NIESKOŃCZONY] Niech Y będzie dowolnym zbiorem niepustym. Każdą funkcję f ze zbioru $\mathbb{N}_1$ w zbiór Y nazywamy *ciągiem nieskończonym*. Wartość funkcji f dla liczby naturalnej n, tj. element $f(n)$ zbioru Y, oznaczamy przez f_n i nazywamy *n-tym wyrazem ciągu*. Sam ciąg (jako funkcję) oznaczamy przez (f_n) i mówimy, że (f_n) jest *ciągiem o wyrazach ze zbioru* Y.

■ Niech f_n, gdzie $n \in \mathbb{N}_1$, oznacza funkcję $f_n(x) = x^2 + n$. Mowa tu o nowej funkcji f, która każdej liczbie naturalnej przypisuje funkcję kwadratową (liczbie naturalnej n przypisana jest funkcja $f_n(x) = x^2 + n$). Ta funkcja f jest ciągim (f_n).

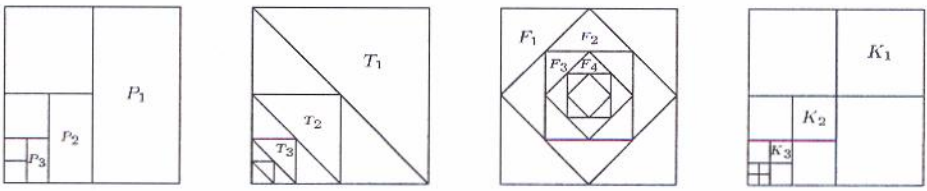
Zamiast litery f, na oznaczanie ciągu używamy liter a, b, c itd. Zapis (a_n) oznacza więc ciąg, którego n-tym wyrazem jest element a_n. Liczbę naturalną n nazywamy *wskaźnikiem wyrazu* a_n. Zwrot: „dany jest ciąg (a_n) o wyrazach ze zbioru Y" orzeka, że „dana jest funkcja $a: \mathbb{N}_1 \longrightarrow Y$ taka, że $a(n) = a_n$".

■ Niech $O(o, n)$ oznacza okrąg na płaszczyźnie kartezjańskiej, którego środkiem jest początek układu i którego promień jest równy n. Każdej liczbie naturalnej odpowiada dokładnie jeden okrąg $O(o, n)$. Mamy w ten sposób określony ciąg nieskończony (a_n), gdzie $a_n = O(o, n)$. Jego wyrazami są okręgi współśrodkowe. Pierwsze cztery wyrazy tego ciągu okręgów mamy na rysunku 70.



Rys. 70 Pierwsze cztery wyrazy ciągu (a_n) okręgów współśrodkowych

■ Niech $A_n = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$. W ten sposób określony jest ciąg nieskończony (A_n), którego wyrazami są zbiory. Jest $A_1 = \{0, 1\}$, $A_2 = \{0, 1, 2\}$, $A_3 = \{0, 1, 2, 3\}$, $A_4 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $A_5 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ itd.



a) b) c) d)

Rys. 71 Ciągi figur zawartych w kwadracie jednostkowym

■ Na rysunku 71 określone są cztery nieskończone ciągi figur zawartych w kwadracie o polu 1. Są to ciągi:
(P_n), gdzie $P_1, P_2, P_3, \ldots$ są prostokątami powstałymi w sposób opisany na rys. 71*a*).
(T_n), gdzie $T_1, T_2, T_3, \ldots$ są trójkątami powstałymi w sposób opisany na rys. 71*b*),
(F_n), gdzie F_1 jest największym z kwadratów na rysunku 71*c*), wierzchołkami kwadratu F_2 są środki boków kwadratu F_1, wierzchołkami kwadratu F_3 są środki boków kwadratu F_2 itd.,
(K_n), którego wyrazami są kwadraty $K_1, K_2, K_3, \ldots$, powstałe w sposób opisany na rysunku 71*d*).

■ Przez U_{n*1} oznaczmy urnę, w której jest n białych kul i jedna kula czerwona. Mamy więc określony ciąg urn, tj. ciąg (U_{n*1}), którego n-tym wyrazem jest urna.

■ Niech δ_n oznacza losowanie kuli z urny U_{n*1}. Mamy zatem nowy ciąg (δ_n), którego wyrazami są doświadczenia losowe.

■ Każde z doświadczeń losowych ciągu (d_n) ma tylko dwa możliwe wyniki:
`b - wylosowana kula będzie biała` i `c - wylosowana kula będzie czerwona`.
Dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$ jest $\Omega = \{\mathsf{b}, \mathsf{c}\}$ zbiorem wyników doświadczenia losowego δ_n.

6.1. Niech $p_n(\omega)$ oznacza prawdopodobieństwo, z jakim doświadczenie δ_n zakończy się wynikiem ω, gdzie $\omega \in \Omega = \{\mathsf{b}, \mathsf{c}\}$. Mamy tym samym określony ciąg (p_n) funkcji. Określ ten ciąg, podając przepis na funkcję p_n dla $n \in \mathbb{N}_1$. Przedstaw funkcję p_n w tabeli.

□ Doświadczenie δ_1 jest losowaniem kuli z urny U_{1*1} z jedną kulą białą i jedną czerwoną, a więc

$$p_1(\mathsf{b}) = \tfrac{1}{2} \text{ i } p_1(\mathsf{c}) = \tfrac{1}{2}.$$

Funkcja p_1 jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze Ω (por. definicja 4-6, s. 42). W zadaniu chodzi o wypełnienie poniższej tabeli:

$\omega \in \Omega_n$:	b	c
$p_1(\omega)$:	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$p_2(\omega)$:	...	...
$p_3(\omega)$:	...	...
...	...	...

.

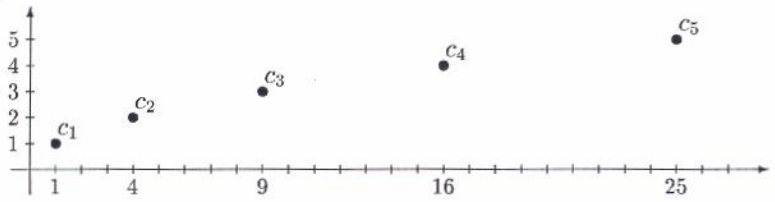
Ciąg można określać wypisując kolejne jego wyrazy. Zapis $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$ jest takim przedstawieniem ciągu (a_n).

■ Zapis $(2, 4, 6, 8, \ldots)$ określa ciąg, którego pierwszym wyrazem jest liczba 2, drugim – liczba 4, trzecim – liczba 6 itd. Wyraz n-ty tego ciągu jest liczbą $2n$, a więc jest to ciąg (a_n), gdzie $a_n = 2n$ dla $n \in \mathbb{N}_1$.

■ Zapis $(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, \ldots)$ oznacza ciąg, którego pierwszym wyrazem jest funkcja $f_1(x) = x$, drugim – funkcja $f_2(x) = x^2$, trzecim – funkcja $f_3(x) = x^3$ itd. Wyraz n-ty tego ciągu jest funkcją $f_n(x) = x^n$. Mowa tu więc o ciągu (f_n), którego kolejne wyrazy są funkcjami i $f_n(x) = x^n$ dla $n \in \mathbb{N}_1$. Jest to ciąg funkcyjny.

■ Niech $f_n(x) = nx + 1$ dla $x \in \mathbb{R}$. Ten wzór określa ciąg nieskończony (f_n), którego n-tym wyrazem jest funkcja f_n ze zbioru $\mathbb{R}$ w zbiór $\mathbb{R}$. Jest to ciąg funkcji liniowych. Wykresy tych funkcji są prostymi, które należą do pęku prostych przechodzących przez punkt o współrzędnych $(0, 1)$.

■ Jeśli $c_n = (n^2, n)$ dla $n \in \mathbb{N}_1$, to (c_n) jest ciągiem punktów na płaszczyźnie kartezjańskiej. Na rysunku 72 zaprezentowano pięć początkowych wyrazów ciągu (c_n).



Rys. 72 Ciąg punktów $(c_1, c_2, c_3, \ldots)$, gdzie $c_n = (n^2, n)$ dla $n \in \mathbb{N}_1$

6.2. Niech $f_n(x) = x - [x] + n$, gdzie $[x]$ oznacza cechę liczby x. Tym wzorem określony jest ciąg (f_n), którego wyrazami są funkcje. Jest to zatem ciąg funkcji określonych na zbiorze $\mathbb{R}$ i o wartościach ze zbioru $\mathbb{R}$. Naszkicuj na płaszczyźnie kartezjańskiej wykresy kilku początkowych funkcji tego ciągu. Jak zachowują się te wykresy gdy n się zmienia? Rozwiąż analogiczne zadanie, gdy $f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}$ oraz, gdy $f_n(x) = nx$.

Definicja 6-2 [PRAWIE WSZYSTKIE WYRAZY CIĄGU] Mówimy, że *prawie wszystkie wyrazy ciągu* (a_n) *mają własność* W, jeśli własność W mają wszystkie wyrazy a_n, dla których $n > n_0$. Oznacza to, że własności W nie ma co najwyżej skończona ilość wyrazów tego ciągu. *„Prawie wszystkie"* oznacza zatem *„wszystkie, za wyjątkiem co najwyżej skończonej ilości"*.

■ Niech $a_n = 2^n$. Prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są większe od 100, bo tylko wyrazy: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 nie są większe od 100.

■ Nie jest prawdą, że prawie wszystkie liczby naturalne są parzyste.

■ Prawie wszystkie wyrazy ciągu (b_n), gdzie $b_n = 10^{10} - n$, są ujemne, bo nie są ujemne tylko wyrazy $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{10^{10}}$.

■ Zbiór $Q = (-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}) \times (-\frac{1}{100}, \frac{1}{100})$ jest kwadratem na płaszczyźnie kartezjańskiej. Niech $O(o, \frac{1}{n})$ będzie okręgiem o środku w początku układu i promieniu $\frac{1}{n}$. Prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n), gdzie $a_n = O(o, \frac{1}{n})$, są okręgami zawierającymi się w kwadracie Q, bo dla każdego $n > 100$ jest

$$O(o, \tfrac{1}{n}) \subset (-\tfrac{1}{100}, \tfrac{1}{100}) \times (-\tfrac{1}{100}, \tfrac{1}{100}).$$

■ Niech $o_n = (0, n)$ dla $n \in \mathbb{N}_1$. Jest więc o_n punktem na płaszczyźnie kartezjańskiej. Niech $K(o_n, n) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : [x^2 + (y - n)^2 \leqslant n^2]\}$. Jest więc $K(o_n, n)$ kołem o środku w punkcie o_n i promieniu równym n. Niech $a_n = K(o_n, n)$. Mamy zatem ciąg, którego wyrazami są koła na płaszczyźnie kartezjańskiej. Wszystkie są styczne do osi odciętych, a ich środki leżą na osi rzędnych. Pole koła $K(o_n, n)$ jest równe πn^2. Zauważmy, że $\pi n^2 > 2\pi$ dla każdego $n > \sqrt{2}$. Zatem prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są kołami o polu większym od 2π. Tylko koło $K(o_1, 1)$ nie ma tej własności.

■ Zbiór $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 13\}$ jest prostą na płaszczyźnie. Prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n), gdzie $a_n = K(o_n, n)$, są kołami, które przecinają prostą L. Tylko wyrazy a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 i a_6 są kołami, które nie mają tej własności.

6.3. Rozważmy zbiór $K_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : [(|x| < \frac{1}{2}n) \wedge (|y| < \frac{1}{2}n)]\}$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$ zbiór K_n jest na płaszczyźnie kartezjańskiej kwadratem. Czy prawdą jest, że prawie wszystkie wyrazy ciągu (K_n) są kwadratami, których pola są liczbami parzystymi? Odpowiedź uzasadnij.

6.4. Niech $A_n = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ dla $n \in \mathbb{N}_1$. Czy prawdą jest, że liczba 1234567890 należy do prawie wszystkich zbiorów ciągu (A_n)? Moc zbioru skończonego jest liczbą jego elementów. W ciągu (A_n) jest nieskończenie wiele zbiorów, których moc jest liczbą parzystą. Czy to są prawie wszystkie wyrazy ciągu (A_n)? Odpowiedź uzasadnij.

6.5. Wykaż, że prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n), gdzie $a_n = \frac{10}{n}$, są mniejsze od 10^{-9}.

□ Nierówność $\frac{10}{n} < 10^{-9}$ jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy $n > 10^{10}$, a więc $a_n < 10^{-10}$ dla $n > 10^{10}$, czyli dla prawie wszystkich liczb naturalnych n.

6.2. Podciąg ciągu

Niech (a_n) będzie ciągiem. Skreślając w tym ciągu pewne wyrazy, dostajemy nowy ciąg, zwany *podciągiem ciągu* (a_n).

■ Skreślmy w ciągu $(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, \ldots)$ wszystkie wyrazy o wskaźnikach parzystych. Pozostałe wyrazy tworzą nowy ciąg: $(x^1, x^3, x^5, \ldots)$. Jest on podciągiem wyjściowego ciągu $(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, \ldots)$. Wyraz n-ty tego podciągu jest $(2n-1)$-ym wyrazem wyjściowego ciągu.

UWAGA: Powyższe określenie *podciągu* nie jest ścisłe. Nie ma bowiem w matematyce pojęcia „czynności skreślania", a i procedura skreślenia nieskończenie wielu wyrazów nie jest wykonalna przez człowieka. Spróbujmy uściślić powyższe określenie podciągu.

Definicja 6-3 [PODCIĄG CIĄGU] Niech (k_n) będzie ciągiem, którego wyrazami są liczby naturalne większe od zera, ale nie wszystkie. Taki ciąg jest zatem funkcją liczbowo-liczbową. Załóżmy, że ten ciąg jest funkcją rosnącą. Oznacza to, że każdy wyraz następny jest większy od poprzedniego. Jeśli (a_n) jest ciągiem, to ciąg (b_n), gdzie $b_n = a_{k_n}$, powstał niejako z ciągu (a_n) przez skreślenie pewnych jego wyrazów. Skreślone zostały wyrazy o tych wskaźnikach, które nie są wyrazami ciągu (k_n). Ciąg (b_n) nazywamy *podciągiem ciągu* (a_n). Ciąg (k_n) jest *ciągiem wskaźników*. Wyrazami podciągu są te wyrazy wyjściowego ciągu, których wskaźniki są wyrazami ciągu wskaźników (pozostałe wyrazy ciągu to jakby te skreślone).

■ W przypadku podciągu $(x^1, x^3, x^5, \ldots)$, uzyskanego z ciągu $(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, \ldots)$, takim ciągiem wskaźników jest ciąg (k_n), gdzie $k_n = 2n - 1$.

■ Niech $a_n = 2n^2 + 3n - 1$ i $k_n = 3n$. Podciąg ciągu (a_n) odpowiadający takiemu ciągowi wskaźników (k_n) jest ciągiem (b_n), gdzie

$$b_n = 2(3n)^2 + 3(3n) - 1, \quad \text{czyli} \quad b_n = 18n^2 + 9n - 1.$$

■ Na rysunku 73 przedstawiono sześć początkowych figur ciągu $(F_1, F_2, F_3, \ldots)$, gdzie:
F_1 jest kołem o promieniu 1,
F_2 jest trójkątem równobocznym wpisanym w koło K_1,
F_3 jest kołem wpisanym w trójkąt równoboczny F_2,
F_4 jest trójkątem równobocznym wpisanym w koło F_3 itd.
Niech $k_n = 2n$. Podciąg ciągu (F_n) odpowiadający ciągowi (k_n) wskaźników jest ciągiem $(F_2, F_4, F_6, \ldots)$ trójkątów równobocznych.
Niech $k_n = 2n - 1$. Ten ciąg wskaźników określa podciąg $(F_1, F_3, F_5, \ldots)$ ciągu (F_n). Kolejne wyrazy tego podciągu są kołami.



Rys. 73 Początkowe wyrazy nieskończonego ciągu figur

Twierdzenie 6-1 *Jeśli prawie wszystkie wyrazy ciągu* (a_n) *mają własność* W *i* (b_n) *jest podciągiem ciągu* (a_n), *to prawie wszystkie wyrazy ciągu* (b_n) *mają własność* W.

6.3. Ciągi liczbowe

Definicja 6-4 [CIĄG LICZBOWY NIESKOŃCZONY] Jeśli (a_n) jest ciągiem nieskończonym i $a_n \in \mathbb{R}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$ (wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami rzeczywistymi), to nazywamy go *ciągiem liczbowym nieskończonym*, albo krótko *ciągiem liczbowym*.

■ Niech $a_n = \frac{n-1}{n}$ dla $n \in \mathbb{N}_1$. Ciąg (a_n) jest ciągiem liczbowym. Jest $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{2}{3}$, $a_4 = \frac{3}{4}$, $a_5 = \frac{4}{5}$ itd.

■ Niech $b_n = 2^n$ i $c_n = (-1)^n$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$. Te wzory na n-te wyrazy określają dwa ciągi liczbowe (b_n) i (c_n). Mamy tu: $b_1 = 2, b_2 = 4, b_3 = 8, b_4 = 16, b_5 = 32$ itd. oraz $c_1 = -1$, $c_2 = 1$, $c_3 = -1$, $c_4 = 1$ itd.

6.6. Niech (F_n) będzie ciągiem figur z rysunku 73. Jeżeli f_n jest polem figury F_n dla $n = 1, 2, 3, \ldots$, to (f_n) jest ciągiem liczbowym. Znajdź kilka początkowych wyrazów tego ciągu.

Aby określić ciąg liczbowy (a_n) wystarczy podać przepis na jego n-ty wyraz. Wzór $a_n = (-1)^n n + 17$ określa ciąg liczbowy (a_n). Mówimy wtedy krótko, że dany jest ciąg $a_n = (-1)^n n + 17$. W taki sposób jest określony ciąg $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, a także ciąg $c_n = \frac{n-1}{n^2+2}$.

Wzór na n-ty wyraz ciągu liczbowego można formułować rekurencyjnie. W taki sposób określone są poniższe ciągi:

■ (a_n), gdzie $a_1 = a$ i $a_{n+1} = a_n + r$ dla $n > 1$ i gdzie a i r są ustalonymi liczbami rzeczywistymi — ciąg (a_n) nazywamy *ciągiem arytmetycznym*;

■ (b_n), gdzie $b_1 = b$ i $b_{n+1} = b_n \cdot q$ dla $n > 1$ i gdzie b i q są ustalonymi liczbami rzeczywistymi i $q \neq 0$ — ciąg (b_n) nazywamy *ciągiem geometrycznym*,

■ (c_n), gdzie $c_1 = 1$ i $c_2 = 2$ oraz $c_{n+1} = \frac{1}{n}(c_1 + c_2 + \cdots + c_n)$ dla $n > 2$.

Nietrudno wykazać, że w przypadku:
— ciągu arytmetycznego (a_n) jest $a_n = a + (n-1)r$ dla $n \in \mathbb{N}_1$,
— ciągu geometrycznego (b_n) jest $b_n = b \cdot q^{n-1}$ dla $n \in \mathbb{N}_1$.

■ Na s. 51 została określona funkcja, zwana *silnią*. Jeśli jej dziedzinę ograniczymy do zbioru $\mathbb{N}_1$, to funkcja ta jest ciągiem liczbowym (a_n), gdzie

$$a_n = n! = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 1, \\ (n-1)! \cdot n & \text{dla } n > 1. \end{cases}$$

Ten ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie.

■ Ciąg liczbowy można także określić słownym opisem. Niech a_n oznacza n-tą cyfrę po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby niewymiernej π. W taki sposób określony jest ciąg (a_n). Jest np.

$$a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_3 = 1,\ a_4 = 5,\ a_5 = 9,\ a_6 = 2,\ a_7 = 6,\ a_8 = 5 \text{ itd.}$$

■ Jeśli przez b_n oznaczyć kolejne przybliżenie liczby $\sqrt{2}$, to słownym opisem został określony pewien ciąg liczbowy (b_n).

■ Niech d_n oznacza liczbę podzielników liczby n, różnych od 1 i różnych od n. Tym słownym opisem został określony ciąg (d_n). Jest tu:

$$d_1 = 0,\ d_2 = 0,\ d_3 = 0,\ d_4 = 1,\ d_5 = 0,\ d_6 = 2,\ d_7 = 0,\ d_8 = 2 \text{ itd.}$$

6.7. Rozważmy trzy punkty na płaszczyźnie kartezjańskiej: $a = (0,1)$, $b = (0,0)$ i $c_n = (\frac{1}{n}, 0)$. Trójkąt o wierzchołkach a, b i c_n oznaczmy przez T_n. Na płaszczyźnie mamy tym samym określony ciąg nieskończony (T_n), którego wyrazami są trójkąty.

1. Naszkicuj kilka początkowych wyrazów tego ciągu nieskończonego.
2. Niech a_n oznacza pole trójkąta T_n. Słownym opisem został określony ciąg liczbowy (a_n). Wyznacz a_1, a_2, a_3. Czy można ten ciąg określić wzorem na n-ty wyraz?
3. Niech b_n oznacza obwód trójkąta T_n. Podaj wzór na n-ty wyraz takiego ciągu liczbowego (b_n).

6.8. Na płaszczyźnie euklidesowej dany jest okrąg o środku w punkcie o i promieniu równym 1. Ustalmy na tym okręgu punkt a.

1. Niech W_n oznacza wielokąt foremny wpisany w ten okrąg i mający $(n+2)$ wierzchołki, przy czym jednym z nich jest punkt a. W taki sposób został określony ciąg, którego wyrazami są wielokąty foremne. Narysuj W_1, W_2, W_3, W_4.
2. Niech b_n będzie obwodem wielokąta W_n. Ciąg (b_n) jest już ciągiem liczbowym i to określonym słownym opisem. Znajdź b_1, b_2, b_3 i b_4.
3. Niech c_n oznacza pole wielokąta W_n. Ciąg (c_n) jest już ciągiem liczbowym. Wyznacz kilka jego początkowych wyrazów.

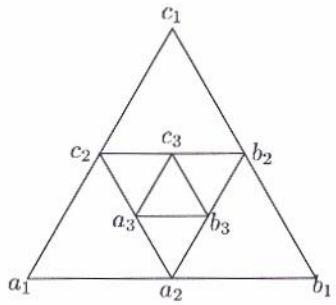
6.9. Dany jest trójkąt T_1 równoboczny o boku równym 1. Środki boków tego trójkąta są wierzchołkami trójkąta T_2. Środki boków trójkąta T_2 są wierzchołkami trójkąta T_3 itd.

1. Niech d_n oznacza długość boku trójkąta T_n dla $n \in \mathbb{N}_1$. Podaj wzór na n-ty wyraz ciągu liczbowego (d_n). Co to za ciąg?
2. Niech p_n oznacza pole trójkąta T_n dla $n = 1, 2, \ldots$. Wykaż, że (p_n) jest ciągiem geometrycznym, dla którego $a = \frac{\sqrt{3}}{4}$ i $q = \frac{1}{4}$.

□ Wierzchołkami trójkąta T_n są punkty a_n, b_n i c_n (zob. rysunek 74 dla $n = 1, 2, 3$). Mamy więc $d_1 = 1, d_2 = \frac{1}{2}, d_3 = \frac{1}{4}$ i ogólnie

$$d_n = (\tfrac{1}{2})^{n-1} \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, 4, \ldots.$$

Jest to zatem ciąg geometryczny.



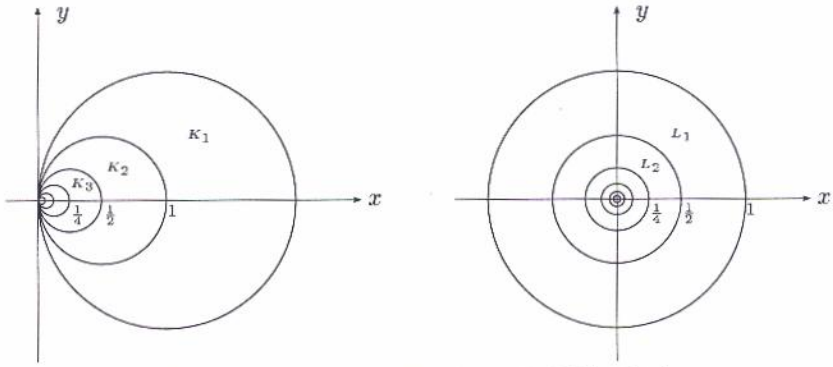
Rys. 74 Ciąg (T_n) trójkątów

Trójkąty $T_1, T_2, T_3, \ldots$ są równoboczne i długość boku trójkąta T_n jest równa $d_n = (\frac{1}{2})^{n-1}$. Pole trójkąta równobocznego o długości boku x jest równe $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$ (jak to uzasadnić?), a zatem $p_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $p_2 = \frac{\sqrt{3}}{16}$, $p_3 = \frac{\sqrt{3}}{64}$ i ogólnie:

$$p_n = \frac{[(\frac{1}{2})^{n-1}]^2\sqrt{3}}{4} = (\tfrac{1}{4})^n \cdot \sqrt{3} \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Fakt, że ciąg (p_n) pól trójkątów jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $q = \frac{1}{4}$ wynika natychmiast z faktu, że po połączeniu środków boków trójkąta równobocznego zostaje on podzielony na cztery przystające trójkąty równoboczne (zob. rysunek 74), a więc pole kolejnego trójkąta w rozważanym ciągu trójkątów stanowi czwartą część pola poprzedniego trójkąta w tym ciągu.

6.10. Niech g_n oznacza obwód trójkąta T_n, o którym mowa w zadaniu 6.9 (por. rysunek 74). Podaj wzór na n-ty wyraz ciągu (g_n).



Rys. 75 Dwa nieskończone ciągi kół: (K_n) i (L_n)

Na rysunku 75 przedstawiono dwa nieskończone ciągi kół: (K_n) i (L_n).
1. Niech k_n oznacza pole koła K_n a l_n — pole koła L_n dla $n \in \mathbb{N}_1$. Podaj wzór na n-ty wyraz każdego z ciągów liczbowych (k_n) i (l_n). Czy są to ciągi geometryczne?
2. Niech a_n oznacza długość okręgu tworzącego koło K_n a b_n — długość okręgu tworzącego koło L_n. Podaj wzory na a_n i b_n.

6.11. Ciąg (a_n) określony jest następującym wzorem rekurencyjnym: $a_1 = 6$ i $a_2 = 18$ i $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 8a_n - 18$. Znajdź a_3, a_4, a_5 i a_6. Udowodnij za pomocą indukcji, że $a_n = 4^n + 2$.

1° Dla $n = 1$ ze wzoru $a_n = 4^n + 2$ dostajemy $a_1 = 6$.
2° Załóżmy, że wzór $a_n = 4^n + 2$ jest prawdziwy dla liczb naturalnych k i $k + 1$. Wykażemy, że wzór ten jest wówczas prawdziwy dla $k + 2$.
Jest:

$$a_{k+2} = 2a_{k+1} + 8a_k - 18 = 2(4^{k+1} + 2) + 8(4^k + 2) - 18 =$$
$$= 2 \cdot 4^{k+1} + 4 + 8 \cdot 4^k + 16 - 18 = 2 \cdot 4^{k+1} + 2 \cdot 4^{k+1} + 2 =$$
$$= 2(4^{k+1} + 4^{k+1}) + 2 = 2 \cdot 2 \cdot 4^{k+1} + 2 = 4^{k+2} + 2.$$

Wzór zachodzi zatem dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$.

6.12. Ciąg (a_n) jest określony następującym wzorem rekurencyjnym:

$$a_n = \begin{cases} -10 & \text{dla } n = 1, \\ a_{n-1} + 1 & \text{dla } n > 1. \end{cases}$$

Wykaż, że prawie wszystkie wyrazy tego ciągu są dodatnie.

6.13. Dany jest ciąg liczbowy $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}$. Wykaż, że prawie wszystkie wyrazy tego ciągu należą do przedziału $(-\frac{1}{100}, \frac{1}{100})$. Udowodnij, że nie jest prawdą iż prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie.

6.14. Oblicz pięć początkowych wyrazów ciągu:
a) (a_n), gdzie $a_n = n + \frac{(-1)^n}{n}$,
b) (b_n), gdzie b_n jest resztą z dzielenia liczby n przez 2,
c) (c_n), gdzie $c_n = 0 + 1 + 2 + \cdots + n$ dla $n \in \mathbb{N}_1$,
d) $d_n = \begin{cases} -10 \text{ dla } n = 1, \\ d_{n-1} + 1 \text{ dla } n > 1. \end{cases}$

6.15. Dane są następujące ciągi liczbowe określone rekurencyjnie:
a) $a_1 = \frac{3}{2}$ i $a_{n+1} = \frac{4}{3}a_n$ dla $n + 1 > 1$,
b) $b_1 = 2$ i $b_2 = -\frac{1}{2}$ oraz $b_{n+2} = (a_n)^2 \cdot b_{n+1}$ dla $n + 2 > 2$,
c) $c_1 = 17$ i $c_{n+1} = c_n - 1$ dla $n + 1 > 1$,
Dla każdego z tych ciągów podaj przepis na n-ty wyraz.

6.16. Podaj przepis na n-ty wyraz ciągu (d_n), wiedząc, że $d_1 = 1$ i $d_n = \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$.

6.17. Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n), gdzie $a_1 = a$ i $a_{n+1} = a_n + r$, gdzie a i r są ustalonymi liczbami rzeczywistymi. Wykaż, że
a) $a_n = a + (n - 1)r$ dla $n > 1$,
b) $a_1 + a_2 + \cdot + a_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$.

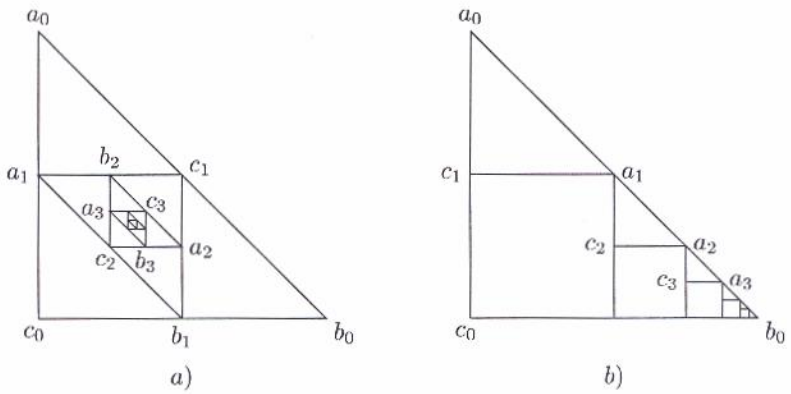
6.18. Dany jest ciąg geometryczny (b_n), gdzie $b_1 = b$ i $b_{n+1} = b_n \cdot q$, gdzie b i q są ustalonymi liczbami rzeczywistymi i $q \neq 0$. Wykaż, że
a) $b_n = b \cdot q^{n-1}$ dla $n > 1$,
b) $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n = \begin{cases} b\frac{1-q^n}{1-q} & \text{dla } q \neq 1, \\ n \cdot b & \text{dla } q = 1. \end{cases}$

■ Rozważmy trójkąt prostokątny, którego obie przyprostokątne mają długość 1. Jest to zatem równoramienny trójkąt prostokątny.
— Na rysunku 76*a* jest to trójkąt T_0, którego wierzchołkami są punkty a_0, b_0 i c_0.
— Na rysunku 76*b* jest to trójkąt Q, którego wierzchołkami są punkty a_0, b_0, c_0.

Środki boków trójkąta T_0 (są to punkty a_1, b_1, c_1 na rys. 76*a*) są wierzchołkami trójkąta T_1, który jest także prostokątny i także równoramienny. Środki boków trójkąta T_1, a więc punkty a_2, b_2, c_2, są wierzchołkami trójkąta T_2, który jest prostokątny i równoramienny. Ten proces tworzenia trójkątów poprzez łączenie środków boków poprzednio uzyskanego trójkąta prowadzi do nieskończonego ciągu $(T_1, T_2, T_3, \ldots)$ trójkątów prostokątnych i równoramiennych.

Rysunek 76*b* prezentuje (nieskończony) ciąg $(Q_1, Q_2, Q_3, \ldots)$ trójkątów prostokątnych równoramiennych. Wierzchołkami trójkąta Q_1 są punkty a_1, c_1, a_0, wierzchołkami trójkąta Q_2 są punkty a_2, c_2, a_1, wierzchołkami trójkąta Q_3 są punkty a_3, c_3, a_2 itd.

6.19. Niech t_n oznacza pole trójkąta T_n ciągu $(T_1, T_2, T_3, \ldots)$ trójkątów prostokątnych i równoramiennych. Przez q_n oznaczmy pole trójkąta Q_n ciągu $(Q_1, Q_2, Q_3, \ldots)$. Wykaż, że oba ciągi liczbowe (t_n) i (q_n) są ciągami geometrycznymi. Znajdź iloraz każdego z tych ciągów. Wykaż, że oba te ciągi są równe (równość ciągów rozumiemy tu jako równość funkcji – zob. definicja 4-5 na s. 41).



Rys. 76 Dwa ciągi trójkątów prostokątnych

6.4. Ciąg Fibonacciego

Definicja 6-5 [CIĄG FIBONACCIEGO] Ciąg liczbowy (f_n), gdzie $f_1 = 1$ i $f_2 = 1$ oraz $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ dla $n > 2$, nazywa się *ciągiem Fibonacciego*. Wyrazy ciągu Fibonacciego nazywamy *liczbami Fibonacciego*.

■ Oto 14 początkowych wyrazów ciągu Fibonacciego:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \ldots.$$

Wyrazy ciągu Fibonacciego szybko rosną. Jest np.

$$f_{25} = 75\,025, \quad f_{100} = 354\,224\,848\,179\,261\,915\,075.$$

Ten ciąg wprowadził włoski kupiec Leonardo z Pizy (1180-1240), zwany później Fibonaccim[6] w kontekście następującego zadania, które zamieścił w swej książce *Liber Abacci*, wydanej w r. 1202 (do dziś przetrwało jej drugie wydanie z r. 1228).

[6] Fibonacci – to znaczy „syn Bonacciego".

6.20. Ile par królików można otrzymać z jednej pary w ciągu jednego roku, jeśli co miesiąc każda para produkuje jedną nową parę, a nowa para zaczyna mieć młode w dwa miesiące po urodzeniu?

□ Niech f_n będzie liczbą par królików w n-tym miesiącu. Zakłada się tu, że każda para składa się z samicy i samca. Jeśli daną w zadaniu parę królików uznać za narodzoną w pierwszym miesiącu ($f_1 = 1$), to w drugim miesiącu będzie znów tylko jedna para ($f_2 = 1$). W trzecim miesiącu będzie $1 + 1$, czyli dwie pary, w czwartym $2 + 1$, czyli trzy pary (z dwu par potomstwo da tylko jedna), w piątym $3 + 2$, czyli pięć par (potomstwo dadzą pary, które urodziły się przed czwartym miesiącem), w szóstym $5 + 3$, tj. osiem par (bowiem potomstwo dadzą tylko te pary, które urodziły się przed piątym miesiącem) itd. W ciągu roku w kolejnych miesiącach liczby par królików będą zatem następujące:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144.$$

Liczby te są kolejnymi wyrazami ciągu Fibonacciego.

6.21. Niech (f_n) będzie ciągiem Fibonacciego. Wykaż, że

$$f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1.$$

□ Z definicji ciągu Fibonacciego wynika następujący układ równości:

$$\begin{aligned} f_1 &= f_3 - f_2, \\ f_2 &= f_4 - f_3, \\ f_3 &= f_5 - f_4, \\ \cdots &\quad \cdots \quad \cdots \\ f_{n-1} &= f_{n+1} - f_n, \\ f_n &= f_{n+2} - f_{n+1}. \end{aligned}$$

Dodając je stronami dostajemy równość

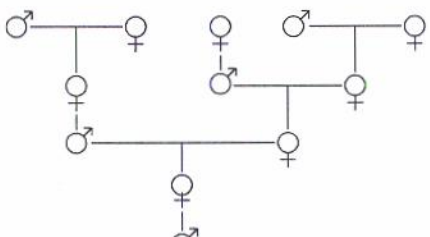
$$f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n = f_{n+2} - f_2.$$

Uwzględniwszy fakt, że $f_2 = 1$, dostajemy równość

$$f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1,$$

co kończy dowód.

6.22. Udowodnij metodą indukcji, że $f_n = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$.

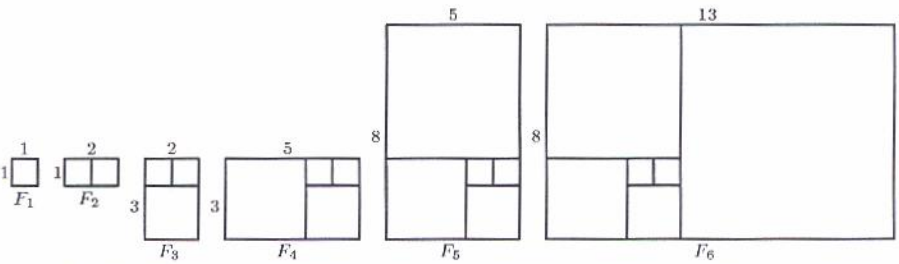


Rys. 77 Drzewo rodowodu samca pszczoły

■ Rysunek 77 przedstawia fragment drzewa genealogicznego samca pszczoły. Każdy samiec (truteń) jest spłodzony bezpłciowo z samicy (jest nią królowa). Ale każda samica ma dwoje rodziców, samicę i samca. Truteń (f_1) ma więc:

— jednego rodzica ($f_2 = 1$),
— jednego dziadka i jedną babcią (czyli dwoje dziadków, $f_3 = 2$),
— jednego pradziadka i dwie prababcie (czyli troje pradziadków, $f_4 = 3$),
— dwóch prapradziadków i trzy praprababcie (czyli pięcioro prapradziadków, $f_5 = 5$) itd. Łatwo sprawdzić, że tenże truteń ma f_{n+1} pra^n-dziadków i f_{n+2} pra^n-babć (por. [6], s. 325).

[BOKI PEWNYCH PROSTOKĄTÓW A LICZBY FIBONACCIEGO] Rozważmy kwadrat o boku 1 i ciąg prostokątów powstałych w następującym ciągu procedur. Zgodnie z ruchem wskazówek zegara będziemy uzupełniać figurę w tym ciągu kwadratem, którego bok jest dłuższym bokiem prostokąta. Pięć początkowych wyrazów tego ciągu mamy na rysunku 78.



Rys. 78 Ciąg prostokątów, których boki są kolejnymi liczbami Fibonacciego

Pierwszym wyrazem ciągu figur jest kwadrat F_1 o boku 1. Drugą figurą jest prostokąt F_2, który powstał przez uzupełnienie kwadratu F_1 drugim kwadratem o boku 1 z prawej strony. Długości boków prostokąta F_2 są liczbami 1 i 2, a zatem są to znów kolejne liczby Fibonacciego. Trzecia figura jest prostokątem F_3, który powstał przez usupełnienie prostokąta F_2 kwadratem o boku 2 u dołu. Prostokąt F_3 ma boki o długościach 2 i 3, które znów są kolejnymi liczbami Fibonacciego.

6.23. Jakie są wymiary prostokąta F_5, jakie prostokąta F_{113}. Podaj wzór na pole prostokąta F_n.

Niech f_n będzie ciągiem Fibonacciego. Zauważ, że

$$(f_1)^2 + (f_2)^2 = 1^2 + 1^2 = 2 = 1 \cdot 2,$$
$$(f_1)^2 + (f_2)^2 + (f_3)^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6 = 2 \cdot 3,$$
$$(f_1)^2 + (f_2)^2 + (f_3)^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 15 = 3 \cdot 5.$$

Powyższe fakty sugerują, że dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$ zachodzi równość

$$(f_1)^2 + (f_2)^2 + (f_3)^2 + \cdots + (f_n)^2 = f_n \cdot f_{n+1}.$$

6.24. Ile jest liczb n-cyfrowych zapisanych tylko za pomocą cyfr 1 i 2, w których cyfra 2 nie występuje obok siebie?

□ Zliczajmy te liczby w przypadku $n = 1, 2, 3$ i 4. Mamy:
— dwie takie liczby jednocyfrowe: 1 i 2,
— trzy dwucyfrowe: 11, 12, 21,
— pięć trzycyfrowych: 111, 112, 121, 211 i 212,
— osiem czterocyfrowych: 1111, 1112, 1121, 1211, 1212, 2111, 2112, 2121.
Pięciocyfrowa liczba zaczyna się
— albo cyfrą 1 i wtedy kolejne cztery cyfry tworzą jedną z ośmiu liczb czterocyfrowych,

— albo cyfrą 2, po niej musi być cyfra 1, a następnie którakolwiek z pięciu liczb trzycyfrowych.

Liczba pięciocyfrowych liczb, o których mowa w zadaniu, jest zatem sumą $8 + 5$, czyli wynosi 13. Analogicznie rozumując stwierdzimy, że liczba wspomnianych liczb sześciocyfrowych jest sumą $13 + 8$.

Niech l_n oznacza liczbę n-cyfrowych liczb, o których mowa w zadaniu. Odkrywamy tu ciekawy związek między liczbami l_n, l_{n-1} i l_{n-2}. Jest mianowicie

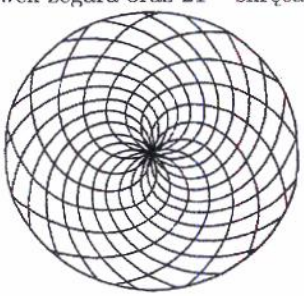
$$l_n = l_{n-1} + l_{n-2} \text{ i } l_1 = 2 \text{ oraz } l_2 = 3,$$

czyli

$$\begin{aligned} l_3 &= l_1 + l_2 = 2 + 3 = 5, \\ l_4 &= l_3 + l_2 = 5 + 3 = 8, \\ l_5 &= l_4 + l_3 = 8 + 5 = 13, \\ l_6 &= l_5 + l_4 = 13 + 8 = 21, \\ l_7 &= l_6 + l_5 = 21 + 13 = 34 \text{ itd.} \end{aligned}$$

Kolejne wyrazy ciągu liczbowego (l_n) są liczbami Fibonacciego.

[LICZBY FIBONACCIEGO WOKÓŁ NAS] Liczba płatków u większości kwiatów jest zawsze liczbą Fibonacciego. Lilie mają 3 płatki, jaskry 5, ostróżki 8, nagietki 13, astry 21 a większość stokrotek ma tych płatków 34, albo 55, albo 89. Zweryfikuj osobiście tę prawidłowość w przyrodzie. Liczby Fibonacciego można spotkać w spiralnych układach ziaren u słonecznika. W tarczy kwiatowej słonecznika kwiaty (a następnie powstałe z nich ziarna) uporządkowane są w dwie przecinające się rodziny spiral. Spirale jednej rodziny skręcają się do środka zgodnie z ruchem wskazówek zegara, spirale drugiej rodziny – w kierunku przeciwnym. Na rysunku 79 znajduje się 13 spiral skręcających się zgodnie z ruchem wskazówek zegara oraz 21 – skręcających się przeciwnie.

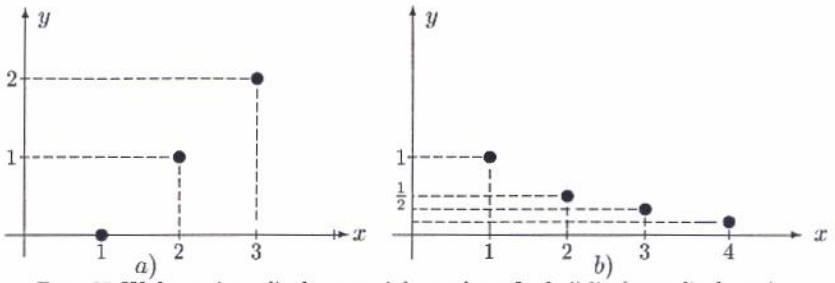


Rys. 79 Spirale skręcające się zgodnie z ruchem wskazówek zegara (13) i spirale skręcające się w kierunku przeciwnym (21)

W kwiatostanach słonecznika liczba spiral skręcających się zgodnie z ruchem wskazówek zegara wynosi 34, a liczba spiral przeciwnych 55. Są to kolejne liczby Fibonacciego. W innych gatunkach słonecznika są to liczby 55 i 89, a nawet 89 i 144. Głowy nasienne większości kwiatów, liście głowy sałaty, warstwy w cebuli, wzory z łusek na ananasie i szyszce sosnowej zawierają również analogiczne spirale w ilościach będących kolejnymi liczbami Fibonacciego (zob. s. 270).

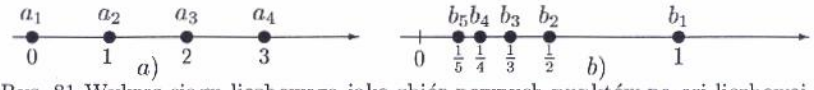
6.5. Wykres ciągu liczbowego

Ciąg liczbowy jest funkcją liczbowo-liczbową, a zatem można mówić o wykresie ciągu liczbowego jako o wykresie funkcji. Na rysunku 80 przedstawione są fragmenty wykresów dwóch ciągów: $a_n = n - 1$ (rysunek a) i $b_n = \frac{1}{n}$ (rysunek b).



Rys. 80 Wykres ciągu liczbowego jako wykres funkcji liczbowo-liczbowej

W innym ujęciu wykresy ciągów (a_n) i (b_n) zaprezentowano na rysunku 81. Na osi liczbowej zaznaczono punkty, których współrzędne są wyrazami tych ciągów. W przypadku ciągu (b_n) na osi liczbowej obrano inną jednostkę.



Rys. 81 Wykres ciągu liczbowego jako zbiór pewnych punktów na osi liczbowej

6.25. Naszkicuj wykresy ciągów liczbowych: $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n)$ i (e_n), gdzie $a_n = -2^n$, $b_n = (-2)^n$, $c_n = (-1)^n$, $d_n = (-1)^n n$, $e_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$.

6.6. Ciągi liczbowe monotoniczne

Każdy ciąg liczbowy (a_n) jest funkcją liczbowo-liczbową, a zatem można mówić o ciągach rosnących, niemalejących, malejących i nierosnących, o ciągach ograniczonych od góry, ograniczonych od dołu i o ciągach ograniczonych.

Definicja 6-6 [CIĄGI MONOTONICZNE] Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy

— *rosnącym*, jeśli $\forall n \in \mathbb{N}_1 : a_{n+1} > a_n$ (każdy jego wyraz następny jest większy od poprzedniego);

— *malejącym*, jeśli $\forall n \in \mathbb{N}_1 : a_{n+1} < a_n$ (każdy wyraz następny jest mniejszy od poprzedniego);

— *niemalejącym*, jeśli $\forall n \in \mathbb{N}_1 : a_{n+1} \geqslant a_n$ (każdy wyraz następny jest nie mniejszy od poprzedniego);

— *nierosnącym*, jeśli $\forall n \in \mathbb{N}_1 : a_{n+1} \leqslant a_n$ (każdy wyraz następny jest nie większy od poprzedniego).

Zbadać monotoniczność ciąg (a_n) oznacza rozstrzygnąć, czy ten ciąg jest rosnący, niemalejący, malejący, czy nierosnący.

■ Ciąg (a_n), gdzie $a_n = 2 - \frac{1}{n}$ jest rosnący. Ciąg (b_n), gdzie $b_n = 2 + \frac{1}{n}$ jest malejący.

6.26. Korzystając z definicji 6-6 udowodnij, że ciąg $a_n = \frac{n}{n+1}$ jest rosnący oraz że ciąg $b_n = 13 - 7n$ jest malejący.

□ Nierówność $a_{n+1} > a_n$ jest równoważna z nierównością $a_{n+1} - a_n > 0$. Równoważne są także nierówności $a_{n+1} < a_n$ i $a_{n+1} - a_n < 0$. Badanie montoniczności ciągu liczbowego można zatem sprowadzić do badania znaku różnicy pomiędzy dowolnym wyrazem ciągu i jego wyrazem poprzednim.

Twierdzenie 6-2 *Ciąg (a_n) jest rosnący wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall n \in \mathbb{N}_1 : [a_{n+1} - a_n > 0],$$

tj. gdy różnica pomiędzy każdym wyrazem następnym i poprzednim jest liczbą dodatnią.

Twierdzenie 6-3 *Ciąg (a_n) jest malejący wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall n \in \mathbb{N}_1 : [a_{n+1} - a_n < 0],$$

tj. gdy różnica między dowolnym wyrazem następnym i poprzednim jest liczbą ujemną.

6.27. Udowodnij, że ciąg liczbowy (a_n), gdzie $a_n = \frac{n+1}{n}$, jest malejący oraz że ciąg liczbowy (b_n), gdzie $b_n = [\frac{n+1}{5}]$, jest niemalejący ($[x]$ oznacza cechę liczby x).

□ Weźmy pod uwagę różnicę $a_{n+1} - a_n$ i zbadajmy jej znak dla $n \in \mathbb{N}_1$.
Jest $a_{n+1} = \frac{(n+1)+1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$, a zatem

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{n(n+2)-(n+1)(n+1)}{n(n+1)} = \frac{n^2+2n-n^2-2n-1}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)}.$$

Dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$ ułamek $\frac{-1}{n(n+1)}$ jest liczbą ujemną, a zatem $a_{n+1} - a_n < 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$, czyli ciąg (a_n) jest malejący, co należało wykazać.

□ W przypadku ciągu (b_n) mamy:
$b_1 = [\frac{2}{5}] = 0$, $b_2 = [\frac{3}{5}] = 0$, $b_3 = [\frac{4}{5}] = 0$, $b_4 = [\frac{5}{5}] = 1$, $b_5 = [\frac{6}{5}] = 1$, itd.

Niech (a_n) będzie takim ciągiem liczbowym, że $a_n > 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$. Jest to więc ciąg o wyrazach dodatnich. W tym przypadku są równoważne następujące dwie nierówności: $a_{n+1} > a_n$ i $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. Mamy zatem kolejne twierdzenia:

Twierdzenie 6-4 *Ciąg liczbowy (a_n) o wyrazach dodatnich jest rosnący wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall n \in \mathbb{N}_1 : [\tfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1],$$

tj. gdy iloraz dowolnego wyrazu następnego i poprzedniego jest liczbą większą od 1.

Twierdzenie 6-5 *Ciąg liczbowy (a_n) o wyrazach dodatnich jest malejący wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall n \in \mathbb{N}_1 : [\tfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1],$$

tj. gdy iloraz dowolnego wyrazu następnego i poprzedniego jest liczbą mniejszą od 1.

6.28. Wykaż, że ciąg (a_n), gdzie $a_n = n!$ dla $n \in \mathbb{N}_1$, jest ciągiem rosnącym.

6.29. Wyrazy ciągu $a_n = \frac{n+1}{n}$, o którym mowa w zadaniu 6.27, są dodatnie. Korzystając z twierdzenia 6-4, wykaż, że ten ciąg jest malejący.

□ Mamy tu:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)+1}{n+1} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{(n+2)n}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} < 1.$$

bo mianownik ostatniego ułamka jest większy od licznika (oba są dodatnie), a zatem z twierdzenia 6-4 wynika, że ciąg (a_n) jest malejący.

6.30. Dane są ciągi liczbowe $(a_n), (b_n)$ i (c_n), gdzie: $a_n = \frac{n^2+1}{n!}$, $b_n = \frac{3^n-2^n}{4^n-3^n}$ oraz $c_n = \frac{(n+1)!+n!}{(n+1)!-n!}$. Zbadaj monotoniczność każdego z tych ciągów.

□ Są to ciągi o wyrazach dodatnich. W przypadku ciągu (c_n) mamy:

$$c_n = \frac{(n+1)! + n!}{(n+1)! - n!} = \frac{n!(n+1) - n!}{n!(n+1) - n!} = \frac{n!(n+1+1)}{n!(n+1-1)} = \frac{n+2}{n}.$$

6.31. Dany jest ciąg (a_n), gdzie $a_n = (-1)^n + c \cdot n$. Czy istnieje taka liczba rzeczywista c, dla której ten ciąg jest rosnący?

6.32. Wiadomo, że ciąg (a_n) jest rosnący. Za pomocą ciągu (a_n) określone są nowe ciągi: $b_n = a_{n+1} + a_n$, $c_n = \frac{1}{2}a_n$, $d_n = \frac{1}{(a_n)^2+1}$. Które z tych ciągów są rosnące?

6.33. Udowodnij, że ciąg (a_n), gdzie $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$, nie jest ani rosnący ani malejący.

6.34. Udowodnij, że ciąg $a_n = (-1)^n n$ nie jest ani rosnący, ani malejący.

6.35. W zadaniu 6.12 mowa jest o ciągu (a_n), gdzie

$$a_n = \begin{cases} -10 & \text{dla} \quad n = 1, \\ a_{n-1} + 1 & \text{dla} \quad n > 1. \end{cases}$$

Niech $k_n = 2n$. Określ podciąg (b_n) tego ciągu (a_n), gdzie $b_n = a_{k_n}$.

6.7. Ciągi liczbowe ograniczone

Definicja 6-7 [CIĄG OGRANICZONY] Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy

— *ograniczonym od dołu*, jeśli $\exists a \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N}_1 : [a_n \geqslant a]$;

— *ograniczonym od góry*, jeśli $\exists b \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N}_1 : [a_n \leqslant b]$;

— *ograniczonym*, jeśli $\exists a \in \mathbb{R} \ \exists b \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N}_1 : [a \leqslant a_n \leqslant b]$.

Ciąg liczbowy jest zatem ograniczony od dołu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba rzeczywista, że wszystkie wyrazy tego ciągu są od niej większe.

Ciąg liczbowy jest ograniczony od góry wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba rzeczywista, że wszystkie wyrazy tego ciągu są od niej mniejsze.

Ciąg liczbowy (a_n) jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba rzeczywista c, że $|a_n| \leqslant c$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$. Ten warunek orzeka, że istnieje taki przedział liczbowy $[-c, c]$, do którego należą wszystkie wyrazy ciągu (a_n).

6.36. Wykaż, że ciąg $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ jest ograniczony oraz że ciąg $b_n = (-1)^n \cdot n$ nie jest ograniczony od dołu i nie jest ograniczony od góry.

Wszystkie wyrazy ciągu (a_n), gdzie $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, są liczbami z przedziału $[-1, 1]$, a więc ten ciąg (a_n) jest ograniczony.

6.37. Udowodnij, że ciąg $a_n = \frac{5^n}{5^n+13}$ jest ograniczony.

6.38. Wykaż, że ciąg $b_n = (-n)^n$ nie jest ograniczony od dołu i nie jest ograniczony od góry.

6.39. Dane są ciągi liczbowe (a_n), (b_n) i (c_n), gdzie $a_n = 2^n + 1$, $b_n = (\frac{13}{5})^n$ i $c_n = \frac{n!}{\pi}$. Wykaż, że każdy z tych ciągów jest rosnący. Czy jest wśród nich ciąg ograniczony?

□ Wyrazy ciągu (c_n) są dodatnie i $c_{n+1} = \frac{(n+1)!}{\pi} = \frac{n!(n-1)}{\pi}$, a zatem

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{n!(n+1)}{\pi} : \frac{n!}{\pi} = \frac{n!(n+1)}{\pi} \cdot \frac{\pi}{n!} = \frac{n!(n+1) \cdot \pi}{\pi \cdot n!} = n + 1 > 1.$$

Jest więc $\frac{c_{n+1}}{c_n} > 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$, czyli ciąg (c_n) jest rosnący.

6.40. Udowodnij, że ciąg $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$ jest ograniczony.

□ Zauważ, że $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$.

Dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$ zachodzi warunek $0 < \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{1}}$, a zatem wszystkie wyrazy ciągu (a_n) należą do przedziału liczbowego $(0, \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{1}}]$, czyli ciąg (a_n) jest ograniczony, co należało dowieść.

6.41. Dane są ciągi: $a_n = \sqrt[n]{2}$, $b_n = \frac{n}{n+1}$, $c_n = \frac{n^2+1}{n}$, $d_n = (-2)^n$, $e_n = \frac{5^n}{n!}$. Rozstrzygnij, czy są one ograniczone od dołu, czy są ograniczone od góry i czy są ograniczone. Który z tych ciągów jest rosnący? Który jest malejący?

6.8. Definicja granicy ciągu – zbieżność w sensie węższym

Definicja 6-8 [OTOCZENIE LICZBY NA OSI] *Otoczeniem liczby g o promieniu ϵ* nazywamy przedział liczbowy $(g-\epsilon, g+\epsilon)$. Otoczenie to oznaczamy symbolem $Ot(g,\epsilon)$.

Z definicji otoczenia liczby g wynika, że $x \in Ot(g,\epsilon) \iff [|x-g| < \epsilon]$. Liczba x należy do $Ot(g,\epsilon)$ wtedy i tylko wtedy, gdy jej odległość od liczby g jest mniejsza od ϵ.

6.42. Otoczeniem liczby 0 o promieniu ϵ jest przedział liczbowy $(-\epsilon, \epsilon)$. Rozważmy ciąg liczbowy $a_n = \frac{1}{n}$ i liczbę dodatnią ϵ. Wykaż, że prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) należą do $Ot(0,\epsilon)$, gdy: a) $\epsilon = \frac{1}{5}$, $\epsilon = \frac{1}{13}$, $\epsilon = \frac{1}{100}$, $\epsilon = \frac{1}{758}$.

Definicja 6-9 [GRANICA CIĄGU] Mówimy, że ciąg (a_n) jest *zbieżny do granicy g*, albo że liczba g jest *granicą ciągu* (a_n), co zapisujemy: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, jeśli

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}_1 \;\; \forall n \in \mathbb{N}_1 : [n > n_\epsilon \Longrightarrow |a_n - g| < \epsilon].$$

Ciągi liczbowe mające granicę w powyższym sensie (tą granicą jest liczba rzeczywista) nazywamy ciągami *zbieżnymi w sensie węższym.*

Warunek, o którym mowa w definicji 6-9, orzeka, że

$$\forall Ot(g,\epsilon) \;\; \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}_1 \;\; \forall n \in \mathbb{N}_1 : [n > n_\epsilon \Longrightarrow a_n \in Ot(g,\epsilon)],$$

a więc, że w każdym otoczeniu liczby g (ϵ jest jego promieniem) leżą prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n), bo wszystkie te, których wskaźniki są większe od pewnej liczby naturalnej n_ϵ.

Wyrazy o dostatecznie wielkich wskaźnikach (tj. dostatecznie dalekie wyrazy) ciągu (a_n) zbieżnego do granicy g są dostatecznie bliskie liczby g.

■ Niech $a_n = \frac{1}{n}$ dla $n \in \mathbb{N}_1$. Rozwiązanie zadania 6.42 podsuwa pomysł dowodu, że $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, czyli że $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Ciąg (a_n), gdzie $a_n = \frac{1}{n}$, jest zbieżny w sensie węższym i ma granicę równą 0.

6.43. Udowodnij, korzystając z definicji granicy ciągu, że: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{1+n^2} = 0$.

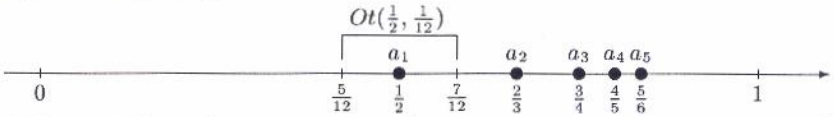
□ Niech $a_n = \frac{3}{1+n^2}$. Nierówność $|a_n - 0| < \epsilon$ jest równoważna z nierównością $|\frac{3}{1+n^2}| < \epsilon$, a ta ostatnia jest równoważna z nierównością $n^2 > \frac{3}{\epsilon} - 1$. Aby spełniona była nierówność $|a_n - 0| < \epsilon$, wystarczy, aby $n^2 > \frac{3}{\epsilon}$, czyli aby $n > \sqrt{\frac{3}{\epsilon}}$. Dla każdego $\epsilon > 0$

istnieje więc $n_\epsilon = \sqrt{\frac{3}{\epsilon}}$, że dla każdego $n > n_\epsilon$ zachodzi nierówność $|\frac{3}{1+n^2} - 0| < \epsilon$, co należało wykazać w zadaniu 6.43a.

6.44. Udowodnij na podstawie definicji granicy ciągu, że:
a) liczba $\frac{1}{2}$ nie jest granicą ciągu $a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$,
b) liczba 1 nie jest granicą ciągu $b_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$.

Niech $a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. Jest tu $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{2}{3}$, $a_3 = \frac{3}{4}$, $a_4 = \frac{4}{5}$, $a_5 = \frac{5}{6}$ itd.

Przedział $(\frac{5}{12}, \frac{7}{12})$ jest otoczeniem liczby $\frac{1}{2}$ o promieniu $\epsilon = \frac{1}{12}$. W tym otoczeniu liczby $\frac{1}{2}$ znajduje się tylko pierwszy wyraz ciągu (a_n) (por. rys. 82), a zatem liczba $\frac{1}{2}$ nie jest granicą ciągu (a_n).



Rys. 82 Otoczenie liczby $\frac{1}{2}$ o promieniu $\epsilon = \frac{1}{12}$ i początkowe wyrazy ciągu $a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$

6.45. Udowodnij, korzystając z definicji granicy ciągu liczbowego, że żaden z poniższych ciągów nie jest zbieżny w sensie węższym.
$a_n = (-1)^n$, $b_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$, $c_n = (-1)^n + (\frac{1}{2})^n$.
Dla każdego z ciągów udowodnij, że żadna liczba rzeczywista nie może być (w sensie definicji) granicą tego ciągu. Jakie wystarczy rozważyć przypadki?

6.46. Korzystając z definicji granicy ciągu udowodnij, że $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n+2}{n+1} = 3$.

□ Niech $\frac{3n+2}{n+1} = a_n$. Zauważ, że

$$|a_n - 3| = |\tfrac{3n+2}{n+1} - 3| = |\tfrac{3n+2-3n-3}{n+1}| = |\tfrac{-1}{n+1}| = \tfrac{1}{n+1} < \tfrac{1}{n} \text{ dla każdego } n \in \mathbb{N}_1.$$

Wynika stąd, że $|a_n - 3| < \epsilon$ dla każdego $n > \frac{1}{\epsilon}$, a to – zgodnie z definicją granicy ciągu – oznacza, że $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n+2}{n+1} = 3$.

6.9. Twierdzenia o ciągach zbieżnych w sensie węższym

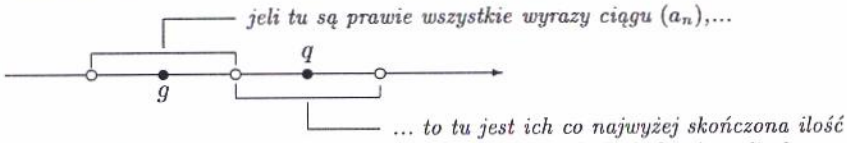
Definicja granicy ciągu pozwala jedynie rozstrzygać, czy zadana z góry liczba g jest granicą danego ciągu (a_n). Ta definicja nie daje recept na to, jak tę granicę znajdować. Granice ciągu liczbowego znajdujemy na ogół za pomocą któregoś z niżej przytoczonych twierdzeń.

Twierdzenie 6-6 *Jeżeli $a_n = a$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$, a więc jeżeli (a_n) jest ciągiem stałym, to $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$.*

Twierdzenie 6-7 *Jeżeli ciąg liczbowy posiada granicę, to tylko jedną.*

Załóżmy, że liczba g jest granicą ciągu (a_n), że granicą ciągu (a_n) jest również liczba q i że $q \neq g$. Niech $q > g$. Z założeń wynika, że w każdym otoczeniu liczby g znajdują się prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) i że w każdym otoczeniu liczby q znajdują się prawie wszystkie wyrazy tego ciągu.

Niech $\epsilon_o = \frac{q-g}{2}$ i rozważmy dwa otoczenia: $Ot(g, \epsilon_o)$ i $Ot(q, \epsilon_o)$. Te otoczenia są rozłączne, a zatem jeśli w pierwszym znajdują się prawie wszystkie wyrazy ciągu, to w drugim może ich być co najwyżej skończona ilość, a to oznacza, że jeśli g jest granicą ciągu (a_n), to nie może nią być liczba q (por. rysunek 83). Ciąg liczbowy nie może mieć dwóch granic.



Rys. 83 Jeśli g jest granicą ciągu (a_n), to nie może być nią żadna inna liczba q

Twierdzenie 6-8 *Jeżeli ciąg ma granicę skończoną, to jest ograniczony.*

Twierdzenie 6-9 *Jeżeli ciąg (a_n) jest ograniczony a ciąg (b_n) jest zbieżny do zera, tj. $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$, to*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = 0.$$

■ Niech $c_n = \frac{1}{n}\sin(n^2+17)$, $a_n = \frac{1}{n}$ oraz $b_n = \sin(n^2+17)$. Jest więc $c_n = a_n \cdot b_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$. Z twierdzenia 6-9 wynika, że $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sin(n^2+17) = 0$, bo ciąg $c_n = \frac{1}{n}\sin(n^2+17)$ jest iloczynem dwóch ciągów: ciągu $a_n = \sin(n^2+17)$, który jest ograniczony i ciągu $b_n = \frac{1}{n}$, który jest zbieżny do zera.

Twierdzenie 6-10 *Jeżeli ciąg (a_n) jest monotoniczny i ograniczony, to jest zbieżny w sensie węższym.*

■ Dowodzi się (dowód pomijamy), że ciąg $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ jest rosnący i ograniczony, a zatem ten ciąg jest zbieżny w sensie węższym.

Definicja 6-10 [LICZBA e] Granicę ciągu $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ nazywa się *liczbą e*, a więc

$$\lim_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e.$$

Liczba e jest niewymierna i $2,718 < e < 2,719$.

6.47. Udowodnij, że ciąg $a_n = \frac{100^n}{n!}$ jest monotoniczny i ograniczony, a więc tym samym, że jest zbieżny w sensie węższym.

Załóżmy, że ciąg (a_n) ma granicę a. Niech c będzie dowolną ustaloną liczbą rzeczywistą. Rozważmy nowy ciąg (b_n), gdzie $b_n = a_n + c$. W kontekście ciągu (b_n) rozważmy liczbę $b = a + c$. Z faktu, że $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ wynika, że dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje n_ϵ, że do otoczenia liczby a o promieniu ϵ należą wszystkie wyrazy ciągu a_n o wskaźnikach większych niż n_ϵ, a więc prawie wszystkie wyrazy. Ale wówczas wyrazy ciągu (b_n), dla których $n > n_\epsilon$, należą do otoczenia liczby $a + c$ o tym promieniu ϵ, a to oznacza, że w każdym otoczeniu liczby $b = a + c$ znajdują się prawie wszystkie wyrazy ciągu (b_n) (bo w każdym otoczeniu liczby a znajdują się prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n)). Mamy zatem kolejne twierdzenie:

Twierdzenie 6-11 *Jeżeli* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ *i* $b_n = a_n + c$, *gdzie* c *jest ustaloną liczbą rzeczywistą, to*

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = a + c,$$

czyli inaczej:

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n + c) = \lim_{n\to+\infty} a_n + c.$$

■ Rozważmy ciąg $b_n = \frac{1}{n} + \sqrt{13}$. Z faktu, że $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$ i z twierdzenia 6-11 wynika, że $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0 + \sqrt{13} = \sqrt{13}$.

Twierdzenie 6-12 *Jeżeli ciąg* (a_n) *jest zbieżny do granicy* g, *to każdy jego podciąg jest także zbieżny i to do granicy* g.

■ Ciąg $b_n = \frac{1}{2n}$ jest podciągiem ciągu $a_n = \frac{1}{n}$, a zatem z powyższego twierdzenia i z faktu, że $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$ wynika, że $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2n} = 0$.

■ Ciąg $a_n = (-1)^n(\frac{1}{n})^2$ ma granicę i $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n(\frac{1}{n})^2 = 0$. Ciąg $b_n = (\frac{1}{2n})^2$ jest podciągiem ciągu (a_n), a zatem $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{1}{2n})^2 = 0$.

6.48. Znajdź granice ciągów: $a_n = (1 + \frac{1}{5n})^{5n}$ i $b_n = (1 + \frac{1}{n^2})^{n^2}$.

□ Ciągi (a_n) i (b_n) są podciągami ciągu $c_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, który jest zbieżny do granicy e, a zatem z ostatniego twierdzenia wynika, że:

$$\lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{1}{5n})^{5n} = e \quad \text{i} \quad \lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{1}{n^2})^{n^2} = e.$$

Z twierdzenia 6-12 wynika następujące:

Twierdzenie 6-13 *Jeżeli dwa podciągi ciągu* (a_n) *są zbieżne do różnych granic, to ciąg* (a_n) *nie ma granicy w sensie węższym.*

■ Ciąg (a_n), gdzie $a_n = (-1)^n$, nie jest zbieżny w sensie węższym, bo istnieją dwa podciągi: (a_{2n}) i (a_{2n-1}), które są zbieżne do różnych granic. Jest tu:

$a_{2n} = (-1)^{2n} = 1$, a zatem $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n} = 1$ oraz

$a_{2n-1} = (-1)^{2n-1} = -1$, a zatem $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n-1} = -1$.

6.49. Rozważmy ciąg ciąg $b_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$. Korzystając z twierdzeń o ciągach zbieżnych w sensie węższym, udowodnij, że ten ciąg (b_n) nie jest zbieżny.

□ W zadaniu 6.45 chodziło o wykazanie za pomocą definicji granicy ciągu, że ciąg (b_n) nie posiada granicy. Teraz wykażemy to korzystając z twierdzenia 6-13.

Niech $k_n = 2n$. Ciąg (b_{k_n}) jest podciągiem ciągu (b_n). Jest to ciąg (b_{2n}) określony wzorem $b_{2n} = 1 + \frac{1}{2n}$. Z udowodnionego wcześniej faktu, że $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2n} = 0$ oraz z twierdzenia 6-11 wynika, iż $\lim\limits_{n\to+\infty}(1 + \frac{1}{2n}) = 1 + 0 = 1$.

Niech $k_n = 2n - 1$. Ciąg (b_{k_n}), czyli ciąg (b_{2n-1}) jest także podciągiem ciągu (b_n) i $b_{2n-1} = -1 + \frac{1}{2n-1}$. Ten ciąg (b_{2n-1}) ma granicę równą -1, co dowodzi się analogicznie, jak w przypadku poprzedniego podciągu.

Wskazaliśmy dwa podciągi ciągu (b_n) zbieżne do różnych granic co dowodzi, że ciąg (b_n) nie jest zbieżny.

6.50. Udowodnij, że ciąg $b_n = 13 + (-1)^n$ nie jest zbieżny w sensie węższym.

Twierdzenie 6-14 [TWIERDZENIE O GRANICY SUMY CIĄGÓW ZBIEŻNYCH]
Jeżeli $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ *i* $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$, *to* $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = a + b$, *czyli:*

jeśli ciągi liczbowe (a_n) *i* (b_n) *są zbieżne w sensie węższym, to jest zbieżny w sensie węższym także ciąg* $(a_n + b_n)$ *i*

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n + \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

Twierdzenie 6-15 [TWIERDZENIE O GRANICY RÓŻNICY CIĄGÓW ZBIEŻNYCH]
Jeżeli $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ *i* $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$, *to* $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = a - b$, *czyli*

jeśli ciągi liczbowe (a_n) *i* (b_n) *są zbieżne w sensie węższym, to jest zbieżny w sensie węższym także ciąg* $(a_n - b_n)$ *i*

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n - \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

Twierdzenie 6-16 [TWIERDZENIE O GRANICY ILOCZYNU CIĄGÓW ZBIEŻNYCH]
Jeżeli $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ *i* $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$, *to* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$, *czyli*

jeśli ciągi liczbowe (a_n) *i* (b_n) *są zbieżne w sensie węższym, to jest zbieżny w sensie węższym także ciąg* $(a_n \cdot b_n)$ *i*

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n \cdot \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

Twierdzenie 6-17 [TWIERDZENIE O GRANICY ILORAZU CIĄGÓW ZBIEŻNYCH]
Jeżeli $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ *i* $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$ *i* $b_n \neq 0$ *dla każdego* $n \in \mathbb{N}_1$ *oraz* $b \neq 0$,
to $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, *czyli*

jeśli ciągi liczbowe (a_n) *i* (b_n) *są zbieżne w sensie węższym i wszystkie wyrazy ciągu* (b_n) *są różne od zera i różna od zera jest granica ciągu* (b_n), *to jest zbieżny w sensie węższym także ciąg* $(\frac{a_n}{b_n})$ *i*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n}.$$

■ Do obliczania granic wielu ciągów wykorzystuje się fakt, że:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \text{ jeśli } a > 1, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

Dowodzi się to za pomocą przytoczonych wyżej twierdzeń o ciągach zbieżnych do granicy skończonej.

6.51. Znajdź granicę ciągów: $a_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ i $b_n = (\frac{n+1}{n})^{2n+1}$.

□ Zauważ, że $(1+\frac{1}{n})^{n-1} = (1+\frac{1}{n})^n \cdot (1+\frac{1}{n})$, a zatem z twierdzenia o granicy iloczynu dwu ciągów zbieżnych w sensie węższym wynika, że

$$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n \cdot \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n}) = e \cdot 1 = e.$$

6.52. Udowodnij, korzystając z twierdzeń o granicy, że:

a) $\lim_{n\to+\infty}\frac{5n+1}{n} = 5$, b) $\lim_{n\to+\infty}\frac{5n+1}{n^2} = 0$,

c) $\lim_{n\to+\infty}\frac{25n^2+10n+1}{n^2} = 25$, d) $\lim_{n\to+\infty}(\frac{5n+1}{n} + \frac{1}{n^2}) = 5$,

e) $\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2+3n+1}{n^2+2n} = 2$.

□ W przypadku ciągu $a_n = \frac{2n^2+3n+1}{n^2+2n}$ z zad. 6.52e) zachodzi równość $a_n = \frac{2+3\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+2\cdot\frac{1}{n}}$.

Jest $\lim_{n\to+\infty}(3\cdot\frac{1}{n}) = 0$ i $\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{n^2}) = 0$ i $\lim_{n\to+\infty}(2\cdot\frac{1}{n}) = 0$.

Z twierdzeń o ciągach zbieżnych w sensie węższym wynika zatem, że

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2+3n+1}{n^2+2n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2+3\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+2\cdot\frac{1}{n}} =$$

$$= \frac{2+\lim_{n\to+\infty}(3\cdot\frac{1}{n}) + \lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{n^2})}{1+\lim_{n\to+\infty}(2\cdot\frac{1}{n})} = \frac{2+0+0}{1+0} = 2,$$

co należało wykazać.

6.53. Ciąg (d_n) określony jest następująco: $d_1 = 1$ i $d_n = \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$. Zbadaj zbieżność tego ciągu.

Z rozwiązania zadania 6.16 wynika, że $d_n = \frac{n+1}{2n}$.

6.54. Rozstrzygnij zbieżność ciągu (a_n), gdzie $a_n = \sqrt{4n^2+3n+1} - 2n$.

□ Mnożąc i równocześnie dzieląc a_n przez $(\sqrt{4n^2+3n+1}+2n)$ dostajemy, że

$$a_n = \frac{(\sqrt{4n^2+3n+1}-2n)(\sqrt{4n^2+3n+1}+2n)}{\sqrt{4n^2+3n+1}+2n} = \frac{4n^2+3n+1-4n^2}{\sqrt{4n^2+3n+1}+2n} =$$

$$= \frac{3n+1}{\sqrt{4n^2+3n+1}+2n} = \frac{3+\frac{1}{n}}{\sqrt{4+3\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+2}.$$

Z faktu, że $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$ oraz z twierdzeń o ciągach zbieżnych wynika, że

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{\sqrt{4+3\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+2} = \frac{3}{4}.$$

Twierdzenie 6-18 [TWIERDZENIE O TRZECH CIĄGACH] *Jeżeli dla trzech ciągów liczbowych (a_n), (b_n) i (c_n) spełnione są warunki: $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$ oraz $\lim_{n\to+\infty} a_n = g$ i $\lim_{n\to+\infty} b_n = g$, to $\lim_{n\to+\infty} c_n = g$.*

Twierdzenie 6-18 nazywamy *twierdzeniem o trzech ciągach.*

6.55. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wykaż, że: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n+5^n}=5$.

□ Zauważ, że $\sqrt[n]{5^n} \leqslant \sqrt[n]{2^n+3^n+5^n} \leqslant \sqrt[n]{5^n+5^n+5^n} = 5\cdot\sqrt[n]{3}$ dla każdego $n\in\mathbb{N}_1$. Zachodzi więc nierówność:

$$5 \leqslant \sqrt[n]{2^n+3^n+5^n} \leqslant 5\cdot\sqrt[n]{3}.$$

Z faktu, że $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3}=1$, wynika, iż $\lim\limits_{n\to+\infty} 5\cdot\sqrt[n]{3}=5$. Jest także $\lim\limits_{n\to+\infty}5=5$, a zatem z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+5^n}=5$, co należało wykazać.

6.56. Wykaż, korzystając z twierdzeń o ciągach zbieżnych, że:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{4n^2+n}-2n=\frac{1}{4}$,

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2-2})=0$,

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5\cdot 3^{2n}-1}{4\cdot 9^n+7}=\frac{5}{4}$.

6.57. Niech a_n oznacza pole n-kąta foremnego opisanego na okręgu o promieniu 1 ($n\in\mathbb{N}_3$). Zbadaj zbieżność tego ciągu (a_n) określonego słownym opisem.

6.58. Danych jest pięć ciągów liczbowych: (a_n), (b_c), (d_n) i (e_n), gdzie $a_n=\frac{5^n\cdot n}{2^n\cdot 3^{n+1}}$, $b_n=\frac{2^n}{n!}$, $c_n=\frac{2n!}{n^n}$, $d_n=n\cdot q^n$, gdzie $|q|<1$, $e_n=\frac{3^n-2^n}{4^n-3^n}$. Wykaż, że każdy z tych ciągów jest zbieżny w sensie węższym i ma granicę 0.

■ Niech (f_n) będzie ciągiem ciągiem Fibonacciego określonym na s. 99 (zob. definicja 6-5). Dowodzi się, że

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

6.59. Na rysunku 71 (s. 91) określono cztery ciągi figur zawartych w kwadracie o polu równym 1. Przypiszmy każdej figurze jej pole. Przyjmijmy, że
p_n jest polem prostokąta P_n na rysunku 71*a*,
t_n jest polem trójkąta T_n z rysunku 71*b*,
f_n jest polem kwadratu F_n z rysunku 71*c*,
k_n jest polem kwadratu K_n na rysunku 71*d*).
Tym samym zostały określone cztery ciągi liczbowe $(p_n),(t_n),(f_n)$ i (k_n). Wszystkie te ciągi są ograniczone i monotoniczne. Jak to uzasadnisz bez znajomości wzoru na n-ty wyraz ciągu? Znajdź wzór na n-ty wyraz każdego z tych ciągów liczbowych. Korzystając z twierdzeń o ciągach zbieżnych w sensie węższym znajdź granicę każdego z tych ciągów.

6.60. Korzystając z twierdzenia 6-10 (zob. s. 108) udowodnij, że są zbieżne w sensie węższym ciągi:
a) (a_n), gdzie $a_n=\frac{n!}{n^n}$ dla $n\in\mathbb{N}_1$,
b) (b_n), gdzie $b_1=\frac{1}{2}$ i $b_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n}$ dla $n\in\mathbb{N}_2$,
c) (c_n), gdzie $c_1=\sqrt{2}$ i $c_{n+1}=\sqrt{2+c_n}$ dla $n\in\mathbb{N}_2$.
Wykaż, że $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$ i $\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=2$.

6.10. Granice niewłaściwe – zbieżność w sensie szerszym

Definicja 6-11 [OTOCZENIE $-\infty$] *Otoczeniem* $-\infty$ nazywamy każdy przedział liczbowy $(-\infty, a)$ i oznaczamy symbolem $Ot(-\infty)$.

Definicja 6-12 [OTOCZENIE $+\infty$] *Otoczeniem* $+\infty$ nazywamy każdy przedział liczbowy $(b, +\infty)$ i oznaczamy symbolem $Ot(+\infty)$.

Definicja 6-13 Mówimy, że *ciąg liczbowy* (a_n) *jest zbieżny do granicy niewłaściwej* $-\infty$, albo krótko, że *jest zbieżny do* $-\infty$, co zapisujemy: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$, jeśli

$$\forall a \in \mathbb{R} \;\; \exists n_a \in \mathbb{N}_1 \;\; \forall n \in \mathbb{N}_1 : [n > n_a \Longrightarrow a_n < a].$$

Warunek, o którym mowa w definicji 6-13, orzeka, że

$$\forall Ot(-\infty) \;\; \exists n_a \in \mathbb{N}_1 \;\; \forall n \in \mathbb{N}_1 : [n > n_a \Longrightarrow a_n \in Ot(-\infty)],$$

a więc, że w każdym otoczeniu $-\infty$ znajdują się prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) (bo wszystkie o wskaźnikach większych od pewnej liczby n_a).

Definicja 6-14 Mówimy, że *ciąg liczbowy* (a_n) *jest zbieżny do granicy niewłaściwej* $+\infty$, albo krótko, że *jest zbieżny do* $+\infty$, co zapisujemy: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, jeśli

$$\forall b \in \mathbb{R} \;\; \exists n_b \in \mathbb{N}_1 \;\; \forall n \in \mathbb{N}_1 : [n > n_b \Longrightarrow a_n > b].$$

Warunek, o którym mowa w definicji 6-14, orzeka, że

$$\forall Ot(+\infty) \;\; \exists n_b \in \mathbb{N}_1 \;\; \forall n \in \mathbb{N}_1 : [n > n_b \Longrightarrow a_n \in Ot(+\infty)],$$

a więc, że w każdym otoczeniu $+\infty$ znajdują się prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) (bo wszystkie o wskaźnikach większych od pewnej liczby n_a).

W ten sposób rozszerzyliśmy pojęcie zbieżności ciągu liczbowego. Mówimy, że ciągi, które mają skończone granice są *ciągami zbieżnymi w sensie węższym*. Ciągi, których granicą jest liczba skończona oraz ciągi zbieżne do $-\infty$ i zbieżne do $+\infty$, nazywamy *ciągami zbieżnymi w sensie szerszym*.

Ciągi zbieżne w powyższym sensie do granicy niewłaściwej nazywa się niekiedy *ciągami rozbieżnymi do* $-\infty$, *albo do* $+\infty$, co prowadzi do pewnych dwuznaczności. W tej pracy przez *ciąg rozbieżny* rozumiemy tylko taki ciąg, który nie posiada granicy w sensie szerszym.

6.61. Korzystając z definicji wykaż, że $\lim\limits_{n\to+\infty} (2 - 3n) = -\infty$.

□ Niech $a_n = 2 - 3n$. Jeśli a jest dowolną liczbą rzeczywistą, to

$$a_n < a \Longleftrightarrow 2 - 3n < a \Longleftrightarrow 3n > 2 - a \Longleftrightarrow n > \tfrac{1}{3}(2 - a).$$

Niech $n_a = [\frac{1}{3}(2 - a)]$. Jest zatem n_a cechą liczby $\frac{1}{3}(2 - a)$. Dla każdego $n > n_a$ zachodzi nierówność $2 - 3n < a$, co dowodzi, że $\lim\limits_{n\to+\infty} (2 - 3n) = -\infty$.

Niech α oznacza albo liczbę rzeczywistą, albo $-\infty$, albo $+\infty$. Otoczeniem α nazywamy więc:

$$Ot(\alpha) = \begin{cases} (\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon), & \text{gdy} \quad \alpha \in \mathbb{R}, \\ (-\infty, a), & \text{gdy} \quad \alpha = -\infty \quad \text{i gdzie} \quad a \in \mathbb{R} \\ (b, +\infty) & \text{gdy} \quad \alpha = +\infty \quad \text{i gdzie} \quad b \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Dzięki temu pojęciu $Ot(\alpha)$ możemy sformułować następującą (wspólną dla wszystkich typów granicy) definicję granicy ciągu:

Definicja 6-15 [DEFINICJA GRANICY CIĄGU] Niech α oznacza albo liczbę skończoną, albo $-\infty$, albo $+\infty$. Mówimy, że *granicą ciągu liczbowego* (a_n) *jest* α i zapisujemy $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \alpha$, jeśli

$$\forall Ot(\alpha)\exists n_\alpha \forall n \in \mathbb{N}_1 [n > n_\alpha \Longrightarrow a_n \in Ot(\alpha)].$$

Twierdzenie 6-19 *Niech α oznacza albo liczbę, albo $-\infty$, albo $+\infty$. Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy α, to każdy jego podciąg jest także zbieżny i to do granicy α.*

Twierdzenie 6-20 *Niech (a_n) będzie ciągiem liczbowym.*

1) *Jeżeli $a_n \neq 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty$, to $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.*

2) *Jeżeli $a_n > 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, to $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$.*

3) *Jeżeli $a_n < 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, to $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$.*

Twierdzenie 6-21 [TWIERDZENIE O DWÓCH CIĄGACH] *Załóżmy, że (a_n) i (b_n) są ciągami liczbowymi.*

1) *Jeżeli $a_n \leqslant b_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, to $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$,*

2) *Jeżeli $a_n \leqslant b_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = -\infty$, to $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.*

6.62. Korzystając z twierdzenia o dwóch ciągach udowodnij, że:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} [3^n + (-1)^n n] = +\infty$, b) $\lim\limits_{n\to+\infty} (3^n + 3n) = +\infty$,

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^5 - 10n^6 + 2) = -\infty$, d) $\lim\limits_{n\to+\infty} (2cosn - 5)n^2 = -\infty$.

Twierdzenie 6-22 *Jeżeli wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie i $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, to*

$$\lim_{n\to+\infty} (1 + \frac{1}{a_n})^{a_n} = e.$$

Twierdzenie 6-23 *Jeżeli wyrazy ciągu (a_n) są ujemne i $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$, to*

$$\lim_{n\to+\infty} (1 + \frac{1}{a_n})^{a_n} = e.$$

6.63. Korzystając z dwóch ostatnich twierdzeń znajdź granice następujących ciągów:

$$a_n = \left(1 - \tfrac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1 - \tfrac{1}{n^2}\right)^{2n+1}, \quad c_n = \left(\tfrac{3n+1}{3n+4}\right)^n.$$

6.64. Dla każdego $q \in \mathbb{R}$ rozstrzygnij zbieżność w sensie szerszym ciągu $a_n = q^n$.

6.65. Niech $a_n = \frac{(0{,}99)^n}{n+1}$. Korzystając z rozwiązania poprzedniego zadania zbadaj zbieżność ciągu (a_n).

6.66. Udowodnij, że $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2 - 52n + 7}{13n - 5} = \infty$ oraz że $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2 - 52n + 7}{13n^3 - 5} = 0$.

6.67. Korzystając z twierdzeń o ciągach zbieżnych w sensie szerszym wykaż, że:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = \infty$, b) $\lim\limits_{n\to+\infty} (4^n + 2) = \infty$, c) $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n+2} - 2^n) = -\infty$.

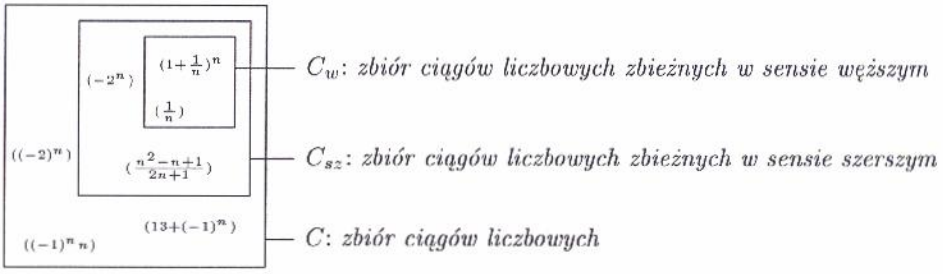
6.68. Niech $a_n = \frac{(k-2)n+1}{(k^2-2k-3)n-2}$. Rozstrzygnij, dla jakiego k:
a) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, b) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$, c) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

□ Nietrudno sprawdzić, że

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(k-2)n+1}{(k^2-2k-3)n-2} = \frac{k-2}{k^2-2k-3},$$

a zatem
a) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $k = 2$,
b) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $k = 3$,
c) a) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $k = -1$.

6.69. Niech $a_n = \frac{n^2+1}{n^2+n}$ i $b_n = \frac{n}{n^3-5}$. Znajdź $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$.



Rys. 84 Trzy zbiory ciągów liczbowych: $C_w \subset C_{sz}$ i $C_{sz} \subset C$

6.70. Rysunek 84 prezentuje trzy zbiory ciągów liczbowych. Wskaż, do którego ze zbiorów: C, C_w, C_{sz} należą poniższe ciągi:
$a_n = -\pi^n$, $b_n = (-\pi)^n$, $c_n = \frac{(-\sqrt{2})^n}{2}$, $d_n = (-\frac{1}{\pi})^n$, $e_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$.

6.11. Symbole nieoznaczone

6.71. Rozważmy cztery pary ciągów liczbowych (a_n) i (b_n), gdzie:
$a_n = -n^2$ i $b_n = n^2 + \frac{1}{n}$;
$a_n = -2n^2$ i $b_n = n^2$;
$a_n = -n^2$ i $b_n = 2n^2$;
$a_n = -n^2$ i $b_n = n^2 + (-1)^n$.
Dla każdej pary ciągów (a_n) i (b_n) zbadaj zbieżność ciągu $(a_n + b_n)$. Jaki wniosek dotyczący zbieżności w sensie szerszym wynika z rozwiązania tego zadania?

6.72. Niech $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \alpha$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \beta$, gdzie α i β oznacza albo liczbę, albo $-\infty$, albo $+\infty$. Ciągi (a_n) i (b_n) są zatem zbieżne w sensie szerszym. Rozstrzygnij zbieżność w sensie szerszym ciągów: $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$ i $(a_n \cdot b_n)$.

6.73. Dla każdej pary ciągów (a_n) i (b_n), gdzie $b_n \neq 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$, rozstrzygnij zbieżność w sensie szerszym ciągu (c_n), gdzie $c_n = \frac{a_n}{b_n}$:

a) $a_n = n^2$ i $b_n = n$,
b) $a_n = c \cdot n$, gdzie $c > 0$ i $b_n = n$,
c) $a_n = n$ i $b_n = n^2$,
d) $a_n = n[2 + (-1)^n]$ i $b_n = n$.
Jaki wniosek wynika z tych przykładów na temat granicy ilorazu dwóch ciągów zbieżnych w sensie szerszym?

Definicja 6-16 [SYMBOLE NIEOZNACZONE] Niech (a_n) i (b_n) będą ciągami zbieżnymi w sensie szerszym.

1) Granicę ilorazu dwu ciągów (a_n) i (b_n), gdzie $b_n \neq 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$, nazywamy *symbolem nieoznaczonym* $[\frac{0}{0}]$, gdy $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$.

2) Granicę ilorazu dwu ciągów (a_n) i (b_n), gdzie $b_n \neq 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$, nazywamy *symbolem nieoznaczonym* $[\frac{\infty}{\infty}]$, gdy:
$(\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \infty$ lub $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty)$ i $(\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \infty$ lub $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = -\infty)$.

3) Granicę iloczynu dwu ciągów (a_n) i (b_n) nazywamy *symbolem nieoznaczonym* $[0\cdot\infty]$, gdy:
$(\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \infty)$ lub $(\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \infty$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0)$.

4) Granicę sumy dwu ciągów (a_n) i (b_n) nazywamy *symbolem nieoznaczonym* $[\infty - \infty]$, gdy:
$(\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \infty$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = -\infty)$ lub $(\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \infty)$.

Nieoznaczoność tych symboli wynika stąd, że nie da się w tych przypadkach jednoznacznie orzec, czym jest granica ilorazu, iloczynu albo sumy wspomnianych ciągów. Granica ta zależy od tego, jakie są ciągi (a_n) i (b_n), a nie tylko jaka jest ich granica.



Rys. 85 Jean le Ronde d'Alembert (1717-1783)

6.74. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach oblicz granicę $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n + (-1)^n}{5n + 1}$.

7. Szeregi liczbowe

7.1. Definicja szeregu

Definicja 7-1 [SZEREG LICZBOWY] Załóżmy, że (a_n) jest ciągiem liczbowym. Niech

$s_1 = a_1,$
$s_2 = a_1 + a_2,$
$s_3 = a_1 + a_2 + a_3,$
$\ldots,$
$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n,$
$\ldots.$

Liczbę s_n nazywamy *n-tą sumą cząstkową ciągu* (a_n). Ciąg liczbowy (s_n), a więc ciąg sum cząstkowych ciągu (a_n), nazywamy *szeregiem liczbowym* i oznaczmy przez $\sum a_n$. Liczbę a_n nazywamy *n-tym wyrazem szeregu*. Mówimy także, że szereg $\sum a_n$ został określony na tle ciągu liczbowego (a_n).

Jeśli $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = s$, to liczbę s nazywamy *sumą szeregu* $\sum a_n$ i zapisujemy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

Liczbę s możemy interpretować jako sumę wszystkich nieskończenie wielu wyrazów ciągu liczbowego (a_n).

■ Jeśli (a_n) jest ciągiem liczbowym, gdzie $a_n = \frac{1}{n}$, to (s_n) jest następującym ciągiem:

$$(1, 1+\tfrac{1}{2}, 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}, 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}, 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}, \ldots).$$

Definicja 7-2 [SZEREG LICZBOWY ZBIEŻNY] Jeżeli ciąg (s_n) sum cząstkowych jest zbieżny w sensie węższym, to mówimy, że *szereg $\sum a_n$ jest zbieżny*. Jeżeli ciąg (s_n) jest rozbieżny, albo ma granicę niewłaściwą, to mówimy, że *szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny*.

■ Niech $a_n = n^2$. Szereg liczbowy utworzony na tle tego ciągu (a_n) jest ciągiem (s_n), gdzie $s_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$. Z rozwiązania zadania 1.19f wynika, że

$$s_n = \tfrac{n(n+1)(2n+2)}{6},$$

a taki ciąg (s_n) nie jest zbieżny w sensie węższym, bo nie jest ograniczony. Szereg $\sum n^2$ jest zatem rozbieżny.

7.1. Niech $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Wykaż, że szereg $\sum a_n$ jest zbieżny.

□ Jest $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Wyraz n-ty ciągu sum cząstkowych jest określony wzorem

$$s_n = \tfrac{1}{1\cdot 2} + \tfrac{1}{2\cdot 3} + \tfrac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \tfrac{1}{n\cdot(n+1)} =$$

$$= (1 - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}) + \cdots + (\tfrac{1}{n-1} - \tfrac{1}{n}) + (\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1}) = 1 - \tfrac{1}{n+1},$$

a zatem $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (1 - \dfrac{1}{n+1}) = 1$, bo $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, czyli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

7.2. Niech $a_n = (\frac{1}{2})^n$. Zbadaj zbieżność szeregu $\sum a_n$, tj. szeregu $\sum (\frac{1}{2})^n$.

□ Szereg $\sum (\frac{1}{2})^n$ jest ciągiem (s_n), gdzie

$$s_1 = \tfrac{1}{2} \quad \text{i} \quad s_n = \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{2})^3 + \ldots + (\tfrac{1}{2})^n.$$

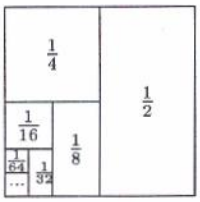
Zauważmy, że (a_n) jest ciągiem geometrycznym, a więc ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów takiego ciągu (por. zad. 6.18) wynika, że dla $n > 1$ jest

$$s_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}},$$

a zatem $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1$. Szereg $\sum(\frac{1}{2})^n$ jest więc zbieżny i

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n = 1,$$

czyli $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots = 1$ (co ukazuje także rysunek 86).



Rys. 86 Wyrazy szeregu liczbowego jako pola oczek sieci narzuconej na kwadrat o polu 1

7.3. Wykaż, że szereg $\sum a_n$, gdzie $a_n = \sqrt{2} + \frac{1}{2}(n-1)$ jest rozbieżny.

Zauważ, że (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, a więc do znalezienia wzoru na n-tą sumę cząstkową można wykorzystać rozwiązanie zadania 6.17

Definicja 7-3 [SZEREG HARMONICZNY] Szereg utworzony na tle ciągu (a_n), gdzie $a_n = \frac{1}{n}$, a więc szereg $\sum \frac{1}{n}$, nazywamy *szeregiem harmonicznym.*

Dowodzi się, że szereg harmoniczny jest rozbieżny.

Definicja 7-4 [SZEREG ANHARMONICZNY] Szereg utworzony na tle ciągu (a_n), gdzie $a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$, a więc szereg $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$, nazywamy *szeregiem anharmonicznym.*

Dowodzi się, że szereg anharmoniczny jest zbieżny.

Definicja 7-5 [SZEREG DIRICHLETA] Szereg utworzony na tle ciągu $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$, gdzie α jest ustaloną liczbą rzeczywistą, nazywamy *szeregiem Dirichleta.*

■ Jeżeli $\alpha > 1$, to szereg Dirichleta $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ jest zbieżny. Jeśli $\alpha = 2$, to szereg Dirichleta ma sumę równą $\frac{1}{6}\pi^2$, czyli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{6}\pi^2.$$

W przypadku $\alpha = 1$ szereg Dirichleta jest szeregiem harmonicznym.

■ Dowodzi się, że:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e - 1, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{1}{4}\pi, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1 \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R}.$$

7.2. Twierdzenia o zbieżności szeregów

Twierdzenie 7-1 *Jeżeli szereg* $\sum a_n$ *jest zbieżny i jego suma jest równa* s_a *oraz* $c \in \mathbb{R}$, *to szereg* $\sum(c \cdot a_n)$ *jest także zbieżny i jego suma jest równa* $c \cdot s_a$.

Twierdzenie 7-2 *Jeżeli szereg* $\sum a_n$ *jest zbieżny i jego suma jest równa* s_a *oraz szereg* $\sum b_n$ *jest zbieżny i ma sumę równą* s_b, *to szereg* $\sum(a_n + b_n)$ *jest także zbieżny i jego suma jest równa* $(s_a + s_b)$.

7.4. Udowodnij, że $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3}{4})^n = 3$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{4^n} = 4$.

Twierdzenie 7-3 *Jeżeli szereg* $\sum a_n$ *jest zbieżny, to* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ostatnie twierdzenie orzeka, że:
— zbieżność szeregu utworzonego na tle ciągu (a_n) wystarcza do tego, aby ten ciąg był zbieżny do zera;
— warunkiem koniecznym zbieżności szeregu utworzonego na tle ciągu (a_n) jest zbieżność tego ciągu do zera.

Twierdzenie 7-4 *Jeżeli* $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ *lub jeżeli ciąg* (a_n) *nie jest zbieżny w sensie węższym, to szereg* $\sum a_n$ *jest rozbieżny.*

Zbieżność do zera ciągu (a_n) jest warunkiem koniecznym, ale nie wystarczającym do zbieżności szeregu $\sum a_n$.

■ Ciąg $a_n = \frac{1}{n}$ jest zbieżny do zera i równocześnie szereg $\sum \frac{1}{n}$ jest rozbieżny.

7.5. Niech $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ dla $n \in \mathbb{N}_1$. Wykaż, że szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny.

7.6. Wykaż, że szereg $\sum(\frac{n^2+2}{n^2})^{2n^2+1}$ nie jest zbieżny.

Twierdzenie 7-5 [KRYTERIUM PORÓWNAWCZE] *Niech* (a_n) *i* (b_n) *będą ciągami liczbowymi. Jeżeli dla prawie wszystkich liczb naturalnych* n *spełniona jest nierówność* $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$, *to*

1) *ze zbieżności szeregu* $\sum b_n$ *wynika zbieżność szeregu* $\sum a_n$,

2) *z rozbieżności szeregu* $\sum a_n$ *wynika rozbieżność szeregu* $\sum b_n$.

7.7. Stosując kryterium porównawcze zbieżności szeregów zbadaj zbieżność szeregu $\sum a_n$, gdzie $a_n = \frac{1}{(n+1)^2}$.

□ Zauważmy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$ zachodzi nierówność:

$$0 < \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)(n+1)} < \frac{1}{n(n+1)}.$$

Z rozwiązania zadania 7.1 wynika, że szereg $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ jest zbieżny, a więc z kryterium porównawczego wynika, że również szereg $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ jest zbieżny.

7.8. Wykaż, że szereg utworzony na tle tego ciągu $a_n = \frac{1}{2^n+1}$ jest zbieżny.

Twierdzenie 7-6 [KRYTERIUM D'ALEMBERTA ZBIEŻNOŚCI SZEREGU] *Załóżmy, że* $\sum a_n$ *jest szeregiem o wyrazach dodatnich oraz że ciąg* $d_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ *jest zbieżny w sensie szerszym. Niech* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$. *Jeśli*

1) $0 \leqslant \alpha < 1$, *to szereg* $\sum a_n$ *jest zbieżny;*

2) *jeśli* $\alpha > 1$, *to szereg* $\sum a_n$ *jest rozbieżny;*

3) *jeśli* $\alpha = 1$, *to szereg* $\sum a_n$ *może być zbieżny albo nie.*

7.9. Korzystając z kryterium d'Alemberta rozstrzygnij zbieżność szeregu $\sum \frac{n^n}{n!}$.

□ Mamy tu

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}n!}{(n+1)!n^n} = \frac{(n+1)^n(n+1)n!}{n!(n+1)n^n} = (\frac{n+1}{n})^n = (1+\frac{1}{n})^n,$$

a zatem

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e > 1,$$

czyli z kryterium d'Alemberta wynika, że szereg jest rozbieżny.

7.10. Niech $a_n = \frac{x^n}{n!}$. Wykaż, że dla każdego $x > 0$ szereg $\sum a_n$ jest zbieżny.

Zbieżność szeregu, o którym mowa w zadaniu, wynika z tego, że

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \quad \text{oraz} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{n+1} = 0.$$

7.11. Zbadaj dla jakiego q jest zbieżny szereg $\sum 2^n q^n$.

Twierdzenie 7-7 [KRYTERIUM CAUCHY'EGO ZBIEŻNOŚCI SZEREGU] *Niech* $\sum a_n$ *będzie szeregiem o wyrazach nieujemnych. Załóżmy, że ciąg* $d_n = \sqrt[n]{a_n}$ *jest zbieżny w sensie szerszym. Niech* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \beta$. *Jeśli*

1) $0 \leqslant \beta < 1$, *to szereg* $\sum a_n$ *jest zbieżny;*

2) *jeśli* $\beta > 1$, *to szereg* $\sum a_n$ *jest rozbieżny;*

3) *jeśli* $\beta = 1$, *to szereg* $\sum a_n$ *może być zbieżny albo nie.*

7.12. Rozważmy szereg $\sum nx^n$. Rozstrzygnij za pomocą kryterium Cauchy'ego, dla jakich x ten szereg jest zbieżny.

7.13. Dane są ciągi liczbowe:

$a_n = \frac{n}{2^n}$, $b_n = \frac{n+1}{n^2+1}$, $c_n = \frac{1}{(2n+1)!}$, $d_n = \frac{(n+1)!}{10^n}$, $e_n = \frac{2^n+3^n}{3^n+4^n}$ i $f_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Stosując powyższe kryteria zbieżności szeregów o wyrazach bądź nieujemnych, bądź dodatnich, rozstrzygnij zbieżność szeregów: $\sum a_n$, $\sum b_n$, $\sum c_n$, $\sum d_n$, $\sum e_n$ i $\sum f_n$, gdzie $n \in \mathbb{N}_1$.

Definicja 7-6 [SZEREG NAPRZEMIENNY] Niech (a_n) będzie ciągiem o wyrazach dodatnich i takim, że

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \quad \text{i} \quad \forall n \in \mathbb{N}_1 : [\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1].$$

Szereg $\sum (-1)^n a_n$ nazywamy *szeregiem naprzemiennym.*

Twierdzenie 7-8 *Każdy szereg naprzemienny jest zbieżny.*

Definicja 7-7 [SZEREG BEZWZGLĘDNIE ZBIEŻNY] Szereg $\sum a_n$ nazywamy *bezwzględnie zbieżnym*, jeżeli zbieżny jest szereg $\sum |a_n|$.

Twierdzenie 7-9 *Jeżeli szereg $\sum |a_n|$ jest zbieżny, to jest również zbieżny szereg $\sum a_n$ i spełniona jest nierówność:*

$$|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Twierdzenie 7-9 orzeka, że jeśli szereg $\sum a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, to jest zbieżny.

Zauważmy, że jeśli szereg o wyrazach nieujemnych jest zbieżny, to jest on zarazem bezwzględnie zbieżny. Zbieżność szeregu o wyrazach nieujemnych jest zarazem jego zbieżnością bezwzględną.

■ Szereg $\sum \frac{|x|^n}{n!}$ jest zbieżny dla każdego $x \in \mathbb{R}$ (por. zadanie 7.10), a zatem dla każdego x jest również zbieżny szereg $\sum \frac{x^n}{n!}$. Szereg $\sum \frac{x^n}{n!}$ jest zatem bezwzględnie zbieżny.

Definicja 7-8 [SZEREG WARUNKOWO ZBIEŻNY] Mówimy, że szereg $\sum a_n$ jest *warunkowo zbieżny*, jeżeli jest on zbieżny, ale nie jest bezwzględnie zbieżny.

■ Szereg $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ jest zbieżny. Szereg $\sum |\frac{(-1)^n}{n}|$ jest szeregiem $\sum \frac{1}{n}$, a ten jest rozbieżny. Szereg $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ jest więc zbieżny ale warunkowo.

7.14. Niech $a_n = \frac{x^n}{n}$. Zbadaj zbieżność szeregu $\sum a_n$. Jeśli szereg jest zbieżny dla danego x, to rozstrzygnij, czy jest to zbieżność bezwzględna czy warunkowa.

□ Najpierw rozstrzygniemy, dla jakich x zbieżność tego szeregu jest w ogóle możliwa.

1) Dla $x > 1$ jest $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n} = \infty$. Dla tych x szereg $\sum \frac{x^n}{n}$ jest rozbieżny, bo nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu.

2) Warunek konieczny zbieżności szeregu nie jest też spełniony dla $x < -1$, a zatem szereg $\sum \frac{x^n}{n}$ jest rozbieżny dla $x < -1$.

3) Dla $|x| < 1$ mamy $|\frac{x^n}{n}| < \frac{1}{n}$. Z twierdzenia o trzech ciągach (jaki jest w tym przypadku ów trzeci ciąg?) wynika, że $\lim_{n\to+\infty} |\frac{x^n}{n}| = 0$, a więc warunek konieczny zbieżności szeregu jest spełniony. Zbadajmy dla tych x zbieżność bezwzględną, tj. zbieżność szeregu $\sum \frac{|x|^n}{n}$. Jest to szereg o wyrazach nieujemnych, a zatem można do niego zastosować kryterium Cauchy'ego. Jest

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n}} = |x| \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = |x|,$$

bo $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1,$

a zatem dla $|x| < 1$ szereg $\sum \frac{x^n}{n}$ jest zbieżny i to bezwzględnie.

4) Dla $x = 1$ dostajemy szereg $\sum \frac{1}{n}$, który jest rozbieżny (jest to szereg harmoniczny).

5) W przypadku $x = -1$ mamy szereg $\sum \frac{(-1)^n}{n}$. Ten szereg – jako szereg naprzemienny – jest zbieżny. Jest to szereg zbieżny warunkowo.

7.15. Rozstrzygnij, dla jakich x są zbieżne następujące szeregi:

a) $\sum \frac{x^n}{1+x^n}$, b) $\sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, c) $\sum n^3 x^n$, $\sum \frac{1}{1+x^n}$.

Niech $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = s$. Do sum skończonych stosuje się prawo przemienności. Po dowolnej zmianie kolejności składników w sumie $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, nowa suma ma też wartość s. Suma szeregu liczbowego $\sum a_n$ jest wartością sumy nieskończonej, bo sumy wszystkich nieskończenie wielu wyrazów ciągu (a_n). Do sum nieskończonych nie stosuje się prawo przemienności. Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$. Po zmianie kolejności wyrazów w szeregu $\sum a_n$ (po przestawieniu wyrazów) nowy szereg może mieć sumę różną od s, a nawet może nie mieć sumy (może być szeregiem rozbieżnym).

Twierdzenie 7-10 *Jeżeli szereg $\sum a_n$ jest bezwzględnie zbieżny i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, to po zmianie kolejności wyrazów tego szeregu nowy szereg jest także zbieżny i ma również sumę s.*

Do szeregów bezwzględnie zbieżnych stosuje się więc prawo przemienności dodawania.

Twierdzenie 7-11 (TWIERDZENIA RIEMANNA) *Jeśli szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, ale warunkowo oraz c jest dowolną ustaloną liczbą rzeczywistą, to można tak zmienić kolejność wyrazów szeregu $\sum a_n$ (tj. można tak przestawić jego wyrazy), że ten nowy szereg będzie zbieżny do c.*

7.3. Szeregi geometryczne

Definicja 7-9 [SZEREG GEOMETRYCZNY] Szereg utworzony na tle ciągu geometrycznego $a_n = aq^{n-1}$, a więc szereg $\sum a \cdot q^{n-1}$, gdzie $q \neq 0$, nazywamy *szeregiem geometrycznym.*

Niech $s_1 = a_1 = a$ i $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^{n-1}$. Ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (por. zadanie 6.18) wynika, że dla $n > 1$ jest

$$s_n = \begin{cases} a\frac{1-q^n}{1-q} & \text{dla} \quad q \neq 1, \\ n \cdot a & \text{dla} \quad q = 1. \end{cases}$$

Jeśli $|q| < 1$, to $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \dfrac{a}{1-q}$, bo $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Szereg geometryczny $\sum aq^{n-1}$ jest zatem zbieżny, gdy $|q| < 1$ i wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}.$$

Jeżeli $|q| \geqslant 1$, to szereg geometryczny $\sum aq^{n-1}$ jest rozbieżny.

7.16. Niech $a_n = (2 - x^2)^{n-1}$. Dla jakich wartości x szereg $\sum a_n$ jest zbieżny?

□ Szereg, o którym mowa w zadaniu, jest szeregiem geometrycznym jeśli $2 - x^2 \neq 0$, czyli gdy $x \neq -\sqrt{2}$ i $x \neq \sqrt{2}$. Nietrudno sprawdzić, że $|2 - x^2| < 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $-\sqrt{3} < x < -1$ lub $1 < x < \sqrt{3}$, a zatem dla tych x szereg, o którym mowa, jest zbieżny.

7.17. Dany jest ciąg $c_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{5^n}$ dla $n \in \mathbb{N}_1$. Wykaż, że utworzony na tle tego ciągu szereg $\sum c_n$ jest zbieżny. Znajdź sumę tego szeregu.

□ Ciąg c_n jest sumą dwu ciągów: $a_n = \frac{1}{2^n}$ i $b_n = \frac{1}{5^n}$, a zatem szereg $\sum c_n$ jest sumą dwu szeregów $\sum a_n$ i $\sum b_n$. Oba ostatnie szeregi, jako szeregi geometryczne, są zbieżne i

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{4},$$

a zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{5^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$

7.18. Znaleźć sumę szeregu $\sum \frac{3^n + 2^n}{6^n}$.

□ Ułamek okresowy 0,13131313... zapisujemy symbolem 0,(13). Ten ułamek można uznać za sumę nieskończoną

$$\frac{13}{100} + \frac{13}{10000} + \frac{13}{1000000} + \cdots,$$

a więc za sumę szeregu geometrycznego $\sum aq^{n-1}$, gdzie $a = \frac{13}{100}$ i $q = \frac{1}{100}$. Jest $|q| = |\frac{1}{100}| < 1$, a zatem ten szereg geometryczny jest zbieżny i

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{13}{100} \left(\frac{1}{100} \right)^{n-1} = \frac{13}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{13}{99}.$$

Takie spojrzenie na ułamek dziesiętny nieskończony ale okresowy jako na sumę pewnego szeregu geometrycznego, pozwala zamienić ten ułamek na ułamek zwykły.

7.19. Zamień na ułamki zwykłe następujące ułamki dziesiętne okresowe:
a) 0,(6), b) 0,5(45), c) 3,(21), d) 27,27(17).

7.20. Rozwiąż równanie $x + 4x^2 + 16x^3 + \cdots = 1$.

7.21. Dla jakich wartości x zachodzi równość $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2x}{1+x} \right)^n = 5$?

7.22. Suma szeregu geometrycznego $\sum a_n$ jest równa $\frac{3}{2}$, suma zaś szeregu $\sum (a_n)^2$ jest równa $\frac{9}{8}$. Określ ciąg (a_n).

7.23. Dany jest ciąg liczbowy (a_n), gdzie $a_1 = 1$ i $a_n = (a^2 - 3a + 1)^{n-1}$ dla $n = 2, 3, 4, \ldots$. Dla jakich wartości parametru a szereg $\sum a_n$ jest zbieżny?

7.24. Niech $b_n = \frac{a_n}{10^n}$ dla $n \in \mathbb{N}_1$, gdzie $a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Wykaż, że szereg liczbowy $\sum b_n$ jest zbieżny.

7.25. Niech $A = [0,1)$ oraz $a_n(x) = n \cdot x^n$, $b_n(x) = \frac{x^n}{n}$ i $c_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ dla $n \in \mathbb{N}_1$. Udowodnij, że dla każdego $x_0 \in A$ są zbieżne szeregi liczbowe: $\sum a_n(x_0)$, $\sum b_n(x_0)$ oraz że zbieżny jest szereg liczbowy $\sum c_n(x_0)$ dla każdego $x_0 \geqslant 0$.

7.4. Szeregi liczbowe a pola

Na rysunku 87 mamy cztery nieskończone ciągi figur zawartych w kwadracie o polu 1. Są to:

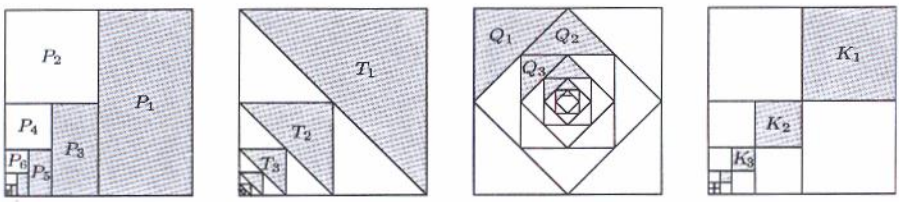
— ciąg (P_n) zaciemnionych prostokątów na rysunku 87*a*,

— ciąg (T_n) zaciemnionych trójkątów na rysunku 87*b*,

— ciąg (Q_n) zaciemnionych trójkątów na rysunku 87*c* oraz

— ciąg (K_n) zaciemnionych kwadratów na rysunku 87*d*.

Rozważmy odpowiednie ciągi pól tych figur. Są to już ciągi liczbowe. Niech p_n oznacza pole prostokąta P_n, t_n — pole trójkąta T_n, q_n — pole trójkąta Q_n oraz k_n — pole kwadratu K_n dla $n = 1, 2, 3, \ldots$. Przepis na n-ty wyraz ciągu (p_n), (t_n) i (k_n) znamy z rozwiązania zadania 6.59 na s. 112 (zob. rysunek 71 na s. 91). Znajdź wzór na n-ty wyraz ciągu (q_n), gdzie q_n jest polem trójkąta Q_n na rysunku 87*c*.



a) *b)* *c)* *d)*

Rys. 87 Ciągi figur zawartych w kwadracie o polu 1

7.26. Określ, zbadaj zbieżność oraz znajdź sumę każdego z szeregów:

$$\sum p_n, \quad \sum t_n, \quad \sum q_n, \quad \sum k_n.$$

Jaką geometryczną interpretację mają sumy tych szeregów?

□ Jest $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = \frac{2}{3}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} t_n = \frac{2}{3}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} q_n = \frac{1}{4}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} k_n = \frac{1}{3}$.

Jak, korzystając z rysunku 87, wytłumaczysz fakt, że

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = \sum_{n=1}^{+\infty} t_n = \frac{2}{3}?$$

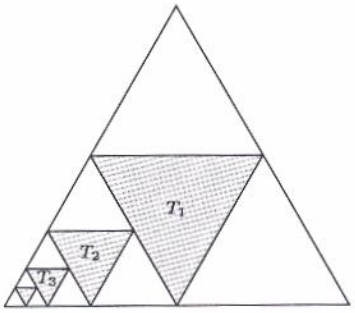
Rysunek 88 prezentuje ciąg trójkątów równobocznych tworzonych wewnątrz trójkąta równobocznego T o boku równym 1. Mowa o zaciemnionych trójkątach na rys. 88. Wierzchołki trójkąta T_1 są środkami boków trójkąta T, wierzchołki trójkąta T_2 są środkami boków trójkąta T_1 itd. Mówimy tu oczywiście o nieskończonym ciągu trójkątów powstałych w opisany sposób.

7.27. Niech t_n będzie polem trójkąta T_n dla $n = 1, 2, 3 \ldots$. Suma pól wszystkich trójkątów ciągu (T_n) jest sumą pewnego szeregu. Wykaż, że jest to szereg geometryczny. Znajdź jego sumę. Sformułuj wniosek, jaki na temat pól figur przedstawionych na rys. 88 wynika z rozwiązania tego zadania.

□ Pole t trójkąta równobocznego o boku a wyraża się wzorem $t = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$. Bok trójkąta T_n ma długość $a_n = \frac{1}{2^n}$. Mamy więc:

$$t_1 = \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2})^2\sqrt{3}, \quad t_2 = \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2^2})^2\sqrt{3}, \quad t_3 = \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2^3})^2\sqrt{3}, \ldots, \quad t_n = \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2^n})^2\sqrt{3}, \ldots.$$

Nietrudno sprawdzić, że $\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{1}{4}$ dla $n = 1, 2, 3 \ldots$, a zatem (t_n) jest ciągiem geometrycznym. Jego pierwszy wyraz jest równy $\frac{1}{16}\sqrt{3}$, iloraz zaś jest ułamkiem $\frac{1}{4}$.



Rys. 88 Ciąg trójkątów równobocznych

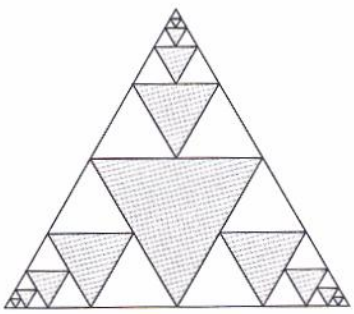
Suma pól wszystkich nieskończenie wielu trójkątów ciągu (T_n) jest sumą szeregu

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^n}\right)^2\sqrt{3}.$$

Jest to szereg geometryczny zbieżny (bo $q = \frac{1}{16}$) i

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^n}\right)^2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{12}.$$

Zauważ, że $\frac{\sqrt{3}}{12}$ to $\frac{1}{3}$ pola wyjściowego trójkąta równobocznego o boku 1. Pole obszaru zaciemnionego na rysunku 88 (jest to suma pól wszystkich nieskończenie wielu zaciemnionych trójkątów równobocznych) stanowi trzecią część pola wyjściowego trójkąta. Z tego faktu wynika ciekawy wniosek.



Rys. 89 Trzy ciągi trójkątów równobocznych wpisywanych w trójkąt równoboczny

Na rysunku 89 procedurę wpisywania trójkątów rozszerzono także na pozostałe dwa trójkąty po wpisaniu trójkąta T_1 (por. rysunek 88). Każdy z trzech powstałych

w ten sposob szeregów liczbowych ma sumę równą $\frac{1}{3}t$, gdzie t jest polem wyjściowego trójkąta równobocznego o boku 1. Suma sum tych szeregów daje zatem pole wyjściowego trójkąta.

7.28. W zadaniu 6.10 na s. 97 mowa jest o dwu ciągach kół (por. rysunek 75). Niech k_n oznacza pole koła K_n a l_n pole koła L_n. Znajdź

$$\sum_{n=1}^{+\infty} k_n \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} l_n.$$

Niech a_n oznacza obwód koła K_n a b_n — obwód koła L_n. Zbadaj zbieżność szeregów liczbowych $\sum a_n$ i $\sum b_n$.

7.29. Rysunek 74 (s. 96) prezentuje ideę tworzenia nieskończonego ciągu $(T_1, T_2, T_3, \ldots)$ trójkątów równobocznych zawartych w trójkącie równobocznym o boku 1. Wierzchołkami każdego następnego trójkąta tego ciągu są środki boków poprzedniego trójkąta. Niech p_n oznacza pole trójkąta T_n dla $n = 1, 2, 3, \ldots$. Oblicz sumę wszystkich nieskończenie wielu wyrazów ciągu (p_n), tj. sumę pól wszystkich trójkątów tego nieskończonego ciągu.

□ Z rozwiązania zadania 6.9 (s. 96) wynika, że (p_n) jest ciągiem geometrycznym, dla którego $a = \frac{\sqrt{3}}{4}$ (a jest pierwszym wyrazem) i $q = \frac{1}{4}$ (q jest ilorazem ciągu). Suma nieskończenie wielu jego wyrazów jest zatem sumą szeregu geometrycznego, czyli

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = \frac{a}{1-q} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

W zadaniu 7.27 także mowa jest o sumie nieskończenie wielu pól trójkątów pewnego ciągu. Chodzi o sumę wszystkich nieskończenie wielu wyrazów ciągu (t_n) określonego w tym zadaniu. Z przystawania pewnych trójkątów wynika, że w przypadku ciągów (p_n) i (t_n) jest $t_1 = p_2, t_2 = p_3, t_3 = p_4, \ldots$ itd. Rozwiązanie zadania 7.29 można zatem uzyskać z rozwiązania zadania 7.27. Do sumy tam uzyskanej wystarczy dodać pole trójkąta równobocznego o polu 1, a więc liczbę $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Mamy zatem

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{4\sqrt{3}}{12} = \frac{4\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

7.30. Jak za pomocą twierdzeń o zbieżności szeregów liczbowych wykazać, że:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n + 3^n}{3^n + 4^n} = 0$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\operatorname{arc\,tg} n}{\pi}\right)^n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{n!^{2n}} = 0$?

Co ma wspólnego z pytaniem b) rozwiązanie zadania 7.13 na s. 120?

Ciekawe metody obliczania sum pewnych szeregów liczbowych przedstawiono w pracach: [12] i [13].

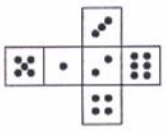
8. Kombinatoryka

8.1. Doświadczenie losowe oraz zbiór jego wyników

Doświadczeniem losowym nazywamy realne lub pomyślane doświadczenie, eksperyment lub zjawisko, o przebiegu i wyniku którego decyduje przypadek, przy czym
— zbiór Ω możliwych wyników tego doświadczenia jest co najwyżej przeliczalny i
— dla każdego wyniku można określić *a priori* prawdopodobieństwo, z jakim doświadczenie zakończy się tym wynikiem, gdy je za chwilę (jutro, za tydzień) wykonamy.
Zbiór wyników doświadczenia losowego jest co najmniej dwuelementowy. Dalej będziemy rozważać doświadczenia losowe, dla których ten zbiór jest skończony.

■ Doświadczeniem losowym jest rzut monetą. Dwa jego możliwe wyniki oznaczamy następująco: o – `wypadnie orzeł`, r – `wypadnie reszka`, czyli $\Omega = \{o, r\}$. W matematyce mówimy tylko o rzucie symetryczną monetą. Jest to pomyślane doświadczenie losowe.

■ Realnym doświadczeniem losowym jest rzut kostką do gry. Jej siatkę przedstawia rys. 90. Wynik doświadczenia jest liczbą wyrzuconych oczek, czyli $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. W matematyce mówimy tylko o rzucie symetryczną kostką. Jest to pomyślane doświadczenie losowe.



Rys. 90 Siatka kostki do gry

■ Doświadczeniem losowym jest losowanie kuli z urny, w której są albo kule różnego koloru albo kule ponumerowane (ale nierozróżnialne w dotyku).

[URNY] Zapis $U_{1\to s}$ oznacza urnę, w której jest s kul ponumerowanych od 1 do s, zapis $U_{0\to s}$ oznacza urnę w której jest $s+1$ kul ponumerowanych od 0 do s.
Zapis U_{b*c} oznacza urnę, w której jest b kul białych i c czerwonych.



⟵ *urna U_{5*1} z pięcioma kulami białymi i jedną czerwoną*

⟵ *urna U_{3*2} z trzema kulami białymi i dwiema czerwonymi*

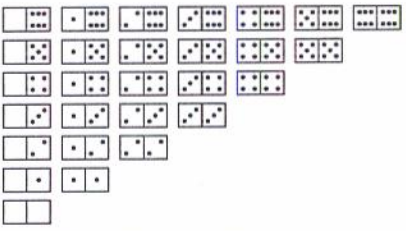
⟵ *urna $U_{1\to 5}$ z pięcioma kulami ponumerowanymi od 1 do 5.*

Rys. 91 Różne typy urn i ich oznaczenia

■ Doświadczeniem losowym jest losowanie równocześnie k kul z urny $U_{1\to s}$ (gdzie $k < s$), albo k-krotne losowanie bez zwracania po jednej kuli (gdzie $k \leqslant s$), albo k-krotne losowanie ze zwracaniem (w tym przypadku k jest dowolną liczbą naturalną większą od 1).

[PRZYRZĄD LOSUJĄCY] Obiekty, za pomocą których przeprowadzamy doświadczenia losowe, nazywamy *przyrządami losującymi*. Przyrządem losującym jest więc moneta, kostka do gry, urna $U_{1\to s}$, bądź urna U_{b*c}.

■ Przyrządem losującym jest zbiór kamieni domina (zob. rys. 92). Wybór *na chybił trafił* jednego kamienia ze zbioru odwróconych kamieni (strony z oczkami są zakryte) i pomieszanych, jest doświadczeniem losowym.



Rys. 92 Kamienie domina

■ Przyrządem losującym jest zbiór 52 kart do gry (zwany talią bridżową) lub dowolny, co najmniej dwuelementowy jego podzbiór. Wykładanie jednej karty na stół po potasowaniu talii 52 kart jest doświadczeniem losowym. Zbiór trzynastu kart, które dostaje gracz na początku gry w bridża jest wynikiem doświadczenia losowego.

Rysunek 13 (s. 30) przedstawia talię kart jako zbiór pewnych punktów płaszczyzny kartezjańskiej. Ten rysunek można także uważać za prezentację zbioru wyników wykładania na stół (a więc losowania) jednej karty z talii 52 potasowanych kart.

Wśród doświadczeń losowych wyróżniamy te, które przebiegają etapami. Nazywamy je *doświadczeniami wieloetapowymi*. Takim doświadczeniem jest trzykrotny rzut monetą, n-krotny rzut kostką, dwukrotne losowanie ze zwracaniem kuli z urny $U_{1\to s}$, a także dwukrotne losowanie bez zwracania kuli z tej urny. Losowanie równocześnie dwóch kul z tej urny nie jest doświadczeniem przebiegającym etapami.

Wynik doświadczenia wieloetapowego przedstawiamy jako ciąg wyników kolejnych etapów. Czasami w zapisie tego ciągu będziemy rezygnować z nawiasów (i) oraz przecinków rozdzielających kolejne wyrazy.

■ Dwukrotny rzut kostką jest doświadczeniem losowym dwuetapowym. Jego wynik jest parą (x, y), gdzie x jest liczbą oczek wyrzuconych w pierwszym rzucie, a y liczbą oczek wyrzuconych w drugim rzucie. Parę (x, y) traktujmy jako punkt w układzie współrzędnych. Zbiór wyników dwukrotnego rzutu kostką możemy więc traktować jako iloczyn kartezjański $\{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$ (por. s. 28). Ten iloczyn kartezjański jest kwadratem kartezjańskim zbioru $\{1,2,3,4,5,6\}$, tj. zbioru wyników pojedynczego rzutu kostką. W takiej interpretacji zbiór wyników dwukrotnego rzutu kostką mamy na rysunku 9 na s. 28.

Jest zatem 36 możliwych wyników dwukrotnego rzutu kostką. Nietrudno zauważyć, że wszystkie one są jednakowo prawdopodobne.

Parę (x, y) – jako wynik dwukrotnego rzutu kostką – możemy utożsamiać z liczbą $10x + y$. Parę $(2,3)$ zapiszemy więc jako liczbę 23 (tym samym w zapisie ciągu dwuwyrazowego zrezygnowaliśmy z nawiasów i przecinka). Zbiór wyników dwukrotnego rzutu kostką w takim ujęciu przedstawiono na rysunku 93.

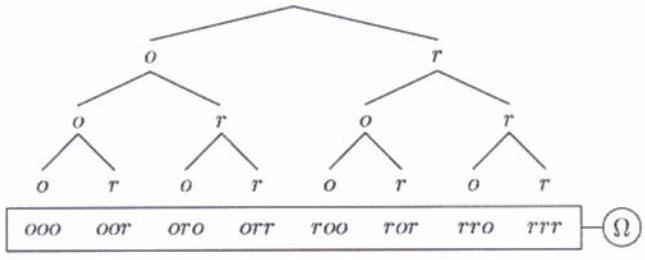
11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

Rys. 93 Zbiór wyników dwukrotnego rzutu kostką

■ Każdy wynik n-krotnego rzutu kostką jest n-wyrazowym ciągiem o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Jego j-ty wyraz jest liczbą oczek wyrzuconych w j-tym rzucie. Zbiór wyników n-krotnego rzutu kostką jest n-tą potęgą kartezjańską zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

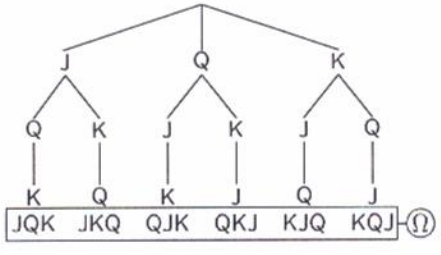
■ Trzykrotny rzut monetą jest doświadczeniem losowym przebiegającym etapami. Ten przebieg oraz zbiór wyników prezentuje graf na rysunku 94. Taki graf nazywa się *drzewem*. Wyniki trzykrotnego rzutu monetą tworzą zbiór:

$$\Omega = \{ooo, oor, oro, orr, roo, ror, rro, rrr\}.$$



Rys. 94 Drzewo i zbiór wyników trzykrotnego rzutu monetą

■ Trzy karty: walet (J), dama (Q) i król (K), po potasowaniu, zostaną rozłożone w rzędzie. O tym, jaka karta trafi na pierwsze, jaka na drugie a jaka na trzecie miejsce, decyduje przypadek. Wynik tego doświadczenia losowego δ jest ciągiem. Jego kolejny wyraz jest kartą, która trafiła na kolejne miejsce w rzędzie. Jeśli na pierwsze miejsce trafi dama, na drugie walet a na trzecie król, to ten wynik przedstawimy jako ciąg Q, J, K, albo krótko QJK. Rysunek 95 ukazuje, jak etapami może przebiegać takie losowe rozkładanie trzech kart na trzech miejscach. Ten rysunek jest drzewem rozważanego doświadczenia losowego.



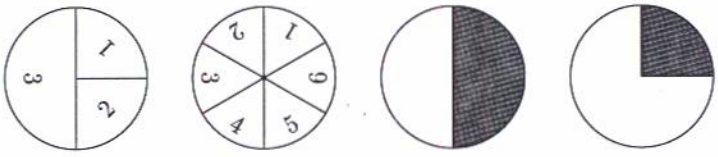
Rys. 95 Drzewo i zbiór wyników rozkładania w rzędzie trzech potasowanych kart: waleta (J), damy (Q) i króla (K)

■ Gra w bridża rozpoczyna się od tasowania kart i rozdania po 13 kart każdemu z graczy. O tym, jakie karty dostaje każdy z graczy, decyduje wyłącznie przypadek.

Przy układaniu pasjansa także tasuje się karty a następnie wykłada na stół pewną ich liczbę. Te karty rozkłada się w różny sposób. O tym, jakie karty trafiają na kolejne miejsca, decyduje przypadek. Układanie pasjansa rozpoczyna się zatem od pewnego doświadczenia losowego.

■ Czasami trzeba wylosować jedną z grona s osób. Bierze się wówczas s zapałek i jednej zapałce łamie się główkę. Ktoś miesza zapałki i wystawia je w dłoni tak, że końce w których jest (lub była) główka są zakryte. Każda z osób wyciąga zapałkę i za wylosowaną uważa się tę osobę, która trafiła na zapałkę bez główki. W tym losowaniu zestaw s zapałek z jedną zapałką bez główki przypomina urnę, w której jest s kul, wśród których jest jedna kula czarna (jest to zapałka bez główki) i $s-1$ kul białych (to są zapałki z główkami). Losowanie za pomocą zapałek jest – z matematycznego punktu widzenia – losowaniem bez zwracania kuli z tej urny i to trwającym tak długo, aż zostanie wylosowana kula czarna. Jest to zatem doświadczenie przebiegające etapami, ale liczba etapów jest losowa.

■ Przyrządem losującym jest *ruletka*. Składa się ona z tarczy, tj. koła podzielonego promieniami na skończoną liczbę sektorów i strzałki, która po wprawieniu w ruch obraca się swobodnie wokół środka tarczy. Sektory ruletki różnią się kolorem. Czasami są one oznaczone liczbami. Sektor, na którym zatrzyma się strzałka, jest wylosowanym sektorem. Na rysunku 96 mamy tarcze kilku ruletek.



Rys. 96 Tarcze kilku ruletek

8.2. Toto-lotek i gra losowa typu Toto Lotka

Są gry, w których szanse na zwycięstwo nauczyciela i najgorszego z matematyki ucznia w klasie są jednakowe. Ale są i takie, w których matematyka pomaga graczowi wpływać na jego losy w grze (np. na szanse zwycięstwa albo zdobycia nagrody).

W TOTO LOTKU losuje się 6 liczb ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 49\}$. To losowanie przeprowadza się w różny sposób. Albo losuje się równocześnie 6 kul z urny $U_{1\to 49}$, albo losuje się 6 razy bez zwracania kulę z tej urny (numery wylosowanych kul są wylosowanymi liczbami).

Zanim w TOTO LOTKU wylosuje się 6 liczb z 49, każdy, kto zdecydował się grać, wypełnia kupon skreślając na nim 6 liczb. Gracz stawia na to, jakim wynikiem zakończy się to doświadczenie. Jeśli losowanie zakończy się wynikiem, na który gracz postawił, to dostaje główną wygraną.

Niech δ będzie doświadczeniem losowym o skończonym zbiorze Ω możliwych wyników. Zanim to doświadczenie zostanie wykonane gracz zgaduje, jakim zakończy się ono wynikiem i jeśli trafnie odgadnie dostaje punkt. Gracz stawia więc na wynik doświadczenia losowego δ i zdobywa nagrodę (np. punkty), jeśli typowanie okaże się

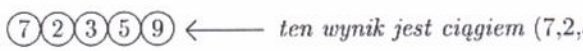
trafne. Ta gra przypomina więc TOTO LOTKA. Nazywamy ją *grą losową typu* TOTO LOTKA

8.1. Po potasowaniu trzech kart, waleta (J), damy (Q) i króla (K), karty zostaną rozłożone w rzędzie, ale zanim to nastąpi każdy z graczy stawia na wynik tego losowego rozkładania trzech kart na trzech miejscach. Gracz wygrywa tyle punktów, w ilu przypadkach trafnie typował kartę. Wygrana gracza jest więc liczbą trafień. Stawianie na wynik może polegać na wypełnieniu kuponu z rysunku 97*a*). Załóżmy, że gracz wypełnił kupon tak, jak na rysunku 97*b*). Przypisz każdemu z możliwych wyników rozkładania kart (ten zbiór prezentuje rysunek 95) liczbę trafień tego gracza.



Rys. 97 Kupon do gry losowej typu TOTO LOTKA

Wynik k-krotnego losowania kuli z urny $U_{1\to s}$ jest k-wyrazowym ciągiem. Ten ciąg będziemy zapisywać jako ciąg numerów kolejno wylosowanych kul. Rysunek 98 przedstawia wynik pięciokrotnego losowania bez zwracania kuli z urny $U_{1\to 9}$.

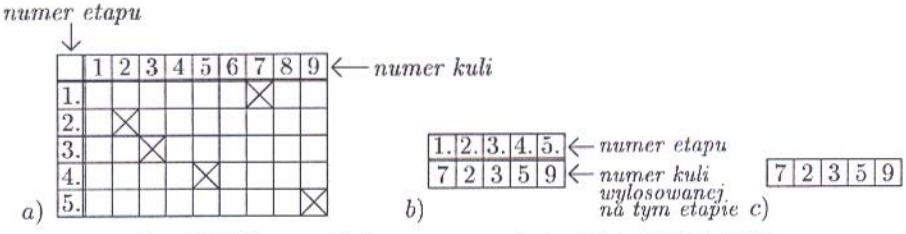


Rys. 98 Wynik pięciokrotnego losowania bez zwracania kuli z urny U_{1-9}

Numery kul w urnie są jednocyfrowe, a zatem ciąg (7,2,3,5,9) możemy zapisywać krótko w postaci 72359, a więc rezygnując w zapisie ciągu z nawiasów i przecinków.

8.2. Za chwilę będzie losowana 5 razy bez zwracania kula z urny $U_{1\to 9}$. Przed wykonaniem tego doświadczenia losowego stawiasz na jego wynik i zdobywasz tyle punktów, w ilu przypadkach trafnie typowałeś kulę. Ta gra losowa przypomina TOTO LOTKA. Zaproponuj kupon do tej gry.
a) Ile takich kuponów wystarczy wypełnić, aby być pewnym, że jest wśród nich taki, za który uzyskasz 5 trafień?
b) Ile jest takich wyników losowania, w których kula wylosowana za pierwszym razem ma numer 3?

□ Stawianie na wynik doświadczenia losowego, o którym mowa w zadaniu 8.2, można realizować poprzez wypełnienie kuponu z rysunku 99*a*). Przypomina on kupon TOTO LOTKA. Typować, że w j-tym losowaniu będzie wylosowana kula numer k, oznacza postawić krzyżyk w j-tym wierszu i k-tej kolumnie. Wypełniony kupon na rysunku 99*a*) prezentuje typowanie na wynik przedstawiony na rysunku 98.



Rys. 99 Różne wersje kuponu w grze losowej typu TOTO LOTKA

Kupon oraz typowanie z rysunku 99*a*) można skrócić do postaci z rysunku 99*b*). Tabela na tym rysunku przedstawia funkcję. Jest to pięciowyrazowy ciąg, który można przedstawić w jeszcze prostszej postaci z rysunku 99*c*). Wypełnić kupon oznacza po prostu zapełnić pięć okienek tabeli tak, że do każdego wpiszemy inną liczbę ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 9\}$.

8.3. Permutacja

Do wróżenia, czy stanie się to, o czym marzę, wykorzystuje się pasjanse. W wielu pasjansach, po potasowaniu kart wykłada się na stół pewną ich liczbę. Czasami jest ważna kolejność, innym razem nie.

W pasjansie PAGANINI[7] (por. [18], s. 56), po potasowaniu 52 kart pełnej talii, rozkłada się wszystkie karty w czterech rzędach po 13 kart w każdym. Miejsca, na które kładziemy kolejno wykładane karty, można ponumerować jak na rys. 100. Wynik rozkładania kart w takim pasjansie jest 52-wyrazowym ciągiem różnowartościowym, którego wyrazami są karty z pełnej talii.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52

Rys. 100 Numeracja miejsc przy rozkładaniu kart w pasjansie PAGANINI

Niech S oznacza dalej dowolny s-elementowy zbiór ($s \geqslant 2$).

Definicja 8-1 [PERMUTACJA] Każdy s-wyrazowy ciąg różnowartościowy, którego wyrazami są elementy zbioru S, nazywamy *permutacją zbioru* S.

Określić permutację zbioru to znaczy ustalić, który jego element uznajemy za pierwszy, który za drugi, który za trzeci itd. Każdą permutację zbioru możemy interpretować jako uporządkowanie jego elementów (te elementy zostały ustawione w ciąg).

Każdy wynik wykładania kart w pasjansie PAGANINI jest permutacją zbioru 52 kart.

8.3. Niech $S = \{\bigcirc, \bigstar, \triangle\}$. Ciąg $(\bigcirc, \bigstar, \triangle)$ jest permutacją zbioru S. Permutacją zbioru S jest także ciąg $(\triangle, \bigcirc, \bigstar)$. Wypisz wszystkie pozostałe permutacje zbioru S.

W zadaniu 8.1 (s. 129) mowa jest o losowym rozkładaniu w rzędzie trzech kart: waleta (J), damy (Q) i króla (K). Wynik tego doświadczenia losowego jest permutacją zbioru {J, Q, K}. Drzewo na rysunku 95 prezentuje zbiór wszystkich permutacji zbioru {J, Q, K}. Jest ich 6.

8.4. W woreczku znajduje się 7 identycznych w dotyku korali: biały (b), zielony (z), czerwony (c), granatowy (g), niebieski (n), żółty (ż) i pomarańczowy (p). Losowane kolejno korale zostają nawlekane na nitkę. W taki losowy sposób powstaje sznur korali. Ile różnych sznurów korali można w ten sposób uzyskać? Sznury: b-z-c-g-n-ż-p i p-ż-n-g-c-z-b to różne sznury korali.

[7] W Polsce znany pod nazwą PASJANS POTOCKIEGO.

Pytanie dotyczy liczby możliwych wyników pewnego doświadczenia losowego. Każdy jego wynik jest permutacją zbioru korali. Aby policzyć, ile ich jest, można zapytać: Na ile sposobów można skonstruować permutację zbioru o siedmiu elementach, a więc na ile sposobów można uporządkować ten zbiór?

8.5. W urnie $U_{1\to s}$ jest s kul ponumerowanych liczbami od 1 do s. Z tej urny będzie losowana kula s razy bez zwracania. Czym jest wynik tego doświadczenia losowego? Określ zbiór Ω wszystkich możliwych wyników. Ile ich jest?

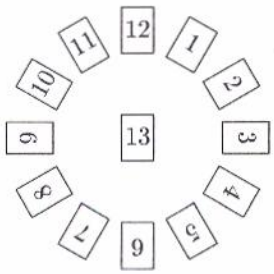
□ Wynik jest ciągiem s-wyrazowym, którego kolejne wyrazy są wynikami kolejnych etapów losowania. Wyraz j-ty tego ciągu jest zatem numerem kuli wylosowanej za j-tym razem. Mowa o losowaniu bez zwracania, a zatem żadne dwa wyrazy tego ciągu nie mogą się powtórzyć. Wynik s-krotnego losowania bez zwracania kuli z urny $U_{1\to s}$ jest zatem permutacją zbioru $S = \{1, 2, 3, \ldots, s\}$. Zbiór Ω wyników tego doświadczenia losowego jest zbiorem wszystkich permutacji zbioru S.

$0! = 1$
$1! = 1$
$2! = 2$
$3! = 6$
$4! = 24$
$5! = 120$
$6! = 720$
$7! = 5\,040$
$8! = 40\,320$
$9! = 362\,880$
$10! = 3\,628\,800$
$11! = 39\,916\,800$
$12! = 479\,001\,600$
$13! = 6\,227\,020\,800$
$14! = 87\,178\,291\,200$
$15! = 1\,307\,674\,368\,000$
$16! = 20\,922\,789\,888\,000$
$17! = 355\,687\,428\,096\,000$
$18! = 6\,402\,373\,705\,728\,000$
$19! = 121\,645\,100\,408\,832\,000$
$20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000$

Rys. 101 Wartości *silni* kilku początkowych liczb naturalnych ($s!$)

Twierdzenie 8-1 *Jeżeli zbiór S ma s elementów, to istnieje $s!$ jego permutacji.*

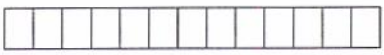
Wyników s-krotnego losowania bez zwracania kuli z urny $U_{1\to s}$ jest zatem $s!$.



Rys. 102 Układ miejsc do rozkładania 13 kart w pasjansie ZEGAR

8.6. W pasjansie ZEGAR, po potasowaniu trzynastu kart tej samej maści, rozkłada się je w układzie godzin na zegarze i to w kolejności tych godzin na tarczy (por. rys. 102). Ostatnią kartę kładzie się w środku. Jeśli wartość każdej wyłożonej karty zgadza się z godziną, na miejscu której znalazła się ta karta a król tarfił w środek (as zaś na miejsce 1), to uznaje się, że pasjans „wyszedł" (to o czym marzę się spełni!?). Ile jest możliwych wyników takiego doświadczenia losowego? Wszystkie są jednakowo prawdopodobne. Jakie są szanse (prawdopodobieństwo), że taki pasjans „wyjdzie"?

8.7. Rekwizytem w grze jest zestaw 13 kart pikowych, które po potasowaniu zostaną rozłożone w rzędzie. Zanim to nastąpi gracz typuje, jakie karty trafią na kolejne miejsca, wpisując w kolejne oczka na kuponie z rys. 103 symbol karty, która – zdaniem gracza – trafi na to miejsce. Jeśli wynik rozkładania jest już znany, to gracz zdobywa tyle złotówek, w ilu przypadkach trafnie wytypował miejsce dla karty. Określ zbiór Ω wszystkich możliwych wyników tego doświadczenia losowego. Ile elementów ma ten zbiór? Ile jest wyników, w których „siódemka" trafiła na trzecie miejsce, a „trójka" na siódme?



Rys. 103 Kupon do gry typu TOTO LOTKA

Wynik rozkładania w rzędzie trzynastu kart pikowych jest permutacją zbioru

$$\{A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K\}.$$

Ta permutacja jest porządkiem wprowadzonym w zbiorze 13 kart. „Autorem" tego porządku jest przypadek. Wszystkich wyników jest 13!, czyli 6 227 020 800 (por. rys. 101). W opisanej grze gracz wygra 13 zł tylko wtedy, gdy rozkładanie zakończy się tym wynikiem, na który on postawił.

8.8. Załóżmy, że za udział w opisanej grze gracz płaci 1 zł i że może (przed rozkładaniem w rzędzie 13 kart) wypełnić tyle kuponów z rys. 103, ile tylko zechce i że za 13 trafień wygrana wynosi aż 5 000 zł.
a) Ile takich kuponów musiałby gracz wypełnić (i jak?), aby być pewnym, że zdobędzie tę główną wygraną.
b) Załóżmy, że wypełnienie jednego kuponu trwa pół minuty. Ile czasu trwać będzie wypełnianie wszystkich kuponów? Czy opłacałoby się je wypełniać, aby być pewnym głównej wygranej (tj. 5 000 zł)?

W zadaniu chodzi o czas potrzebny na wypełnianie 6 227 020 800 kuponów.

8.4. Wariacja bez powtórzeń

Definicja 8-2 [WARIACJA BEZ POWTÓRZEŃ] Niech k będzie ustaloną liczbą naturalną nie większą od s, gdzie $s \in \mathbb{N}_2$. Każdy k-wyrazowy i różnowartościowy ciąg, którego wyrazami są elementy zbioru s-elementowego S, nazywamy *k-wyrazową wariacją bez powtórzeń zbioru S*.

Jeżeli $k = s$, to k-wyrazowa wariacja bez powtórzeń s-elementowego zbioru S jest permutacją tego zbioru.

8.9. Po potasowaniu czterech asów z pełnej talii kart na stół zostaną rozłożone w rzędzie: a) trzy karty; b) wszystkie cztery karty.

Interesujmy się maścią kart trafiających na kolejne miejsca. Określ zbiór Ω wyników każdego z tych doświadczeń losowych.

□ Kodujmy karty znakami ich maści. Ciąg $(\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit)$ przedstawia jeden z możliwych wyników rozkładania w rzędzie trzech kart. Ten wynik jest trzywyrazową wariacją bez powtórzeń zbioru $\{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$. Zbiór wyników rozkładania na trzech miejscach trzech kolejno wyciąganych kart jest zbiorem wszystkich trzywyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$.

Ciąg $(\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit, \diamondsuit)$ przedstawia jeden wynik rozkładania w rzędzie czterech kart. Każdy wynik tego doświadczenia losowego jest permutacją zbioru $\{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$.

8.10. Po potasowaniu 13 kart pikowych 5 kart z góry zostanie rozłożonych w rzędzie. Zanim to nastąpi gracz typuje, jakie karty trafią na kolejne miejsca. Gracz wypełnia kupon z rys. 104 tak, że każdym wierszu stawia jeden krzyżyk, przy czym w j-tym wierszu stawia krzyżyk pod kartą, która – jego zdaniem – trafi na j-te miejsce. Za trafne przewidzenie wyniku opisanego doświadczenia losowego gracz dostaje główną wygraną. Ile takich kuponów wystarczy wypełnić, aby być pewnym głównej wygranej?

	A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K
1													
2													
3													
4													
5													

Rys. 104 Kupon do pewnej karcianej wersji TOTO LOTKA

8.11. Z urny $U_{1\to s}$ będzie losowana kula k-razy bez zwracania ($k \leqslant s$). Określ zbiór Ω wyników tego doświadczenia losowego δ. Ile elementów ma ten zbiór? Ile jest takich wyników, w których kula o numerze j będzie wylosowana za j-tym razem?

□ Wynikiem losowania jest k-wyrazowy ciąg, którego j-tym wyrazem jest numer kuli wylosowanej za j-tym razem. Kule losujemy bez zwracania, a zatem wyrazy tego ciągu są różne. Niech $S = \{1, 2, 3, \ldots, s\}$. Każdy wynik doświadczenia losowego δ jest k-wyrazową wariacją bez powtórzeń zbioru S i każda taka wariacja jest możliwym wynikiem doświadczenia δ. Pytanie o liczbę elementów zbioru Ω jest pytaniem o liczbę k-wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru S. Zamiast pytania:

ile jest takich wariacji?

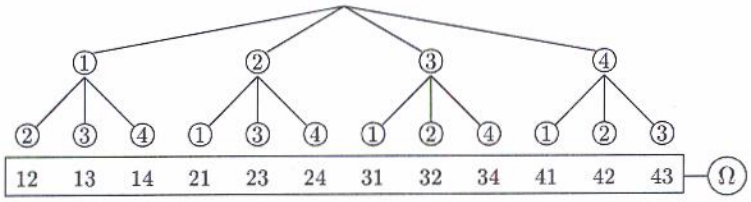
postawmy pytanie:

na ile sposobów możemy taką wariację utworzyć?.

Określić taką wariację, to znaczy określić jej kolejne wyrazy. Pierwszy wyraz możemy wybrać na s sposobów (na początku jest w urnie s kul). Po pierwszym losowaniu zostaje w urnie $(s-1)$ kul, a zatem drugi wyraz można ustalić na $(s-1)$ sposobów itd. Po określeniu $(k-1)$ kolejnych wyrazów w urnie pozostało $(s-k+1)$ kul. Ostatni k-ty wyraz można ustalić na $(s-k+1)$ sposobów. Łącznie mamy więc $s \cdot (s-1) \cdot (s-2) \cdot \ldots \cdot (s-k+1)$ sposobów. Zauważ, że

$$s \cdot (s-1) \cdot (s-2) \cdot \ldots \cdot (s-k+1) = \frac{s!}{(s-k)!}.$$

Twierdzenie 8-2 *Jeśli zbiór S ma s elementów i $k \leqslant s$, to liczba k-wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru S wynosi $s \cdot (s-1) \cdot (s-2) \cdots (s-k+1)$, czyli $\frac{s!}{(s-k)!}$.*



Rys. 105 Drzewo dla dwukrotnego losowania bez zwracania kuli z urny U_{1-4}

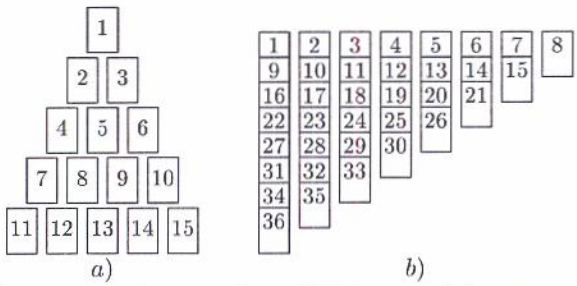
Wszystkie możliwe sposoby przebiegu losowania opisanego w zadaniu 8.11 oraz jego wyniki w przypadku $s = 4$ i $k = 2$ przedstawione są na rys. 105. Liczba tych wyników jest zatem iloczynem $4 \cdot 3$, czyli wynosi 12.

8.12. Po potasowaniu 32 kart od siódemek do asa (tzw. mała talia) zostanie wyłożonych w rzędzie 8 kart. Określ zbiór Ω możliwych wyników tego doświadczenia losowego. Ile jest tych wyników?

Wynik jest ośmiowyrazową wariacją bez powtórzeń zbioru 32 kart. Wyrazem j-tym tej wariacji jest karta, która trafiła na j-te miejsce. Liczba elementów zbioru Ω jest zatem równa

$$32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot \ldots \cdot 26 \cdot 25, \text{ czyli } \frac{32!}{(32-8)!}.$$

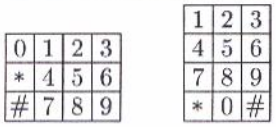
8.13. W pasjansie PIRAMIDA (por. [18], s. 13-15) po potasowaniu 52 kart pełnej talii wykłada się 15 kart. Kolejność, w jakiej wykłada się karty, przedstawia rysunek 106*a*). Powstała „piramida" jest wynikiem pewnego doświadczenia losowego δ. Czym jest ten wynik (ta „piramida") z punktu widzenia kombinatoryki? Ile jest różnych piramid, które mogą powstać w opisany (losowy) sposób? Ile jest „piramid" (wyników doświadczenia losowego δ), w których na miejscach 7., 8., 9. i 10. są asy?



Rys. 106 Sposób wykładania kart w pasjansach: PIRAMIDA (*a*) oraz HARFA EOLSKA (*b*)

8.14. W pasjansie HARFA EOLSKA (zob. [18], s. 37) po potasowaniu 104 kart (dwie talie), wykłada się na stół 36 kart w kolejności jak na rys. 106*b*). Czym jest z punktu widzenia kombinatoryki „harfa" powstała w taki losowy sposób? Z punktu widzenia rachunku prawdopodobieństwa jest ona wynikiem pewnego doświadczenia losowego. Ile jest możliwych wyników? Ile jest wyników, w których na miejscach 5., 13., 20. i 26. są asy?

8.15. W restauracjach McDonalda drzwi wejściowe na zaplecze (wejście dla personelu) otwiera się na szyfr. Zamek szyfrowy ma 12 przycisków (zob. rys. 107). Aby drzwi otworzyć trzeba w odpowiedniej kolejności nacisnąć cztery różne przyciski spośród dziesięciu oznaczonych cyframi. Na ile sposobów można określić szyfr takiej blokady do drzwi? Czym jest ten szyfr z punktu widzenia kombinatoryki?



Rys. 107 Tablica z przyciskami u drzwi na zaplecze

8.5. Wariacja

8.16. Niech k oznacza dowolną ustaloną liczbę naturalną. Z urny $U_{1\to s}$ o s kulach ponumerowanych od 1 do s będzie losowana kula k razy ze zwracaniem. Przed losowaniem gracz stawia na jego wynik i zdobywa tyle punktów, ile ma trafień. Zaproponuj kupon do tej gry. Ile takich kuponów wystarczy wypełnić, aby mieć pewność, że zdobyło się główną wygraną, tj. k punktów?

Wypełniony kupon ma prezentować wynik doświadczenia losowego, o którym mowa w zadaniu (ma być tego wyniku kodem). Każdy wynik k-krotnego losowania ze zwracaniem kuli z urny U_{1-s} jest k-wyrazowym ciągiem, którego j-ty wyraz jest numerem kuli wylosowanej za j-tym razem. Wyrazy tego ciągu mogą się powtarzać, bo kule losuje się ze zwracaniem.

Definicja 8-3 [WARIACJA] Niech k będzie dowolną ustaloną liczbą naturalną większą od 1. Każdy k-wyrazowy ciąg, którego wyrazami są elementy zbioru s-elementowego S, nazywamy *k-wyrazową wariacją zbioru S*.

Uwaga: Czasami wariacje, o których teraz mowa, nazywa się mylnie *wariacjami z powtórzeniami*. W przypadku, gdy $k \leqslant s$ każda k-wyrazowa wariacja bez powtórzeń jest zarazem k-wyrazową wariacją zbioru S. Gdyby te ostatnie nazywać „wariacjami z powtórzeniami", to każda wariacja bez powtórzeń byłaby jednocześnie wariacją z powtórzeniami, co prowadzi do językowego absurdu.

Niech $S = \{1, 2, 3, \ldots, s\}$. Każdy wynik losowania, o którym mowa w zadaniu 8.16, jest *k-wyrazową wariacją zbioru S*. W zadaniu chodzi także o odpowiedź na pytanie, ile jest takich wariacji. Sformułujmy pytanie inaczej. Zapytajmy, na ile sposobów może taka wariacja powstać jako wynik doświadczenia losowego opisanego w zadaniu. Każdy wyraz wariacji może powstać na s sposobów, a zatem liczba k-wyrazowych wariacji zbioru S jest równa s^k.

Twierdzenie 8-3 *Jeżeli zbiór S ma s-elementów, to liczba k-wyrazowych wariacji zbioru S jest równa s^k.*

Symbolem S^k oznacza się w matematyce zbiór wszystkich k-wyrazowych wariacji zbioru S. Zauważ, że $\overline{\overline{S^k}} = (\overline{\overline{S}})^k$.

W grze opisanej w zadaniu 8.16 wystarczy wypełnić s^k „kuponów" i to tak, aby każda wariacja była reprezentowana przez dokładnie jeden kupon.

8.17. Są dwa możliwe wyniki rzutu monetą: orzeł (o) i reszka (r). Doświadczenie losowe δ jest n-krotnym rzutem monetą. Określ zbiór Ω wszystkich wyników tego doświadczenia losowego. Ile elementów ma ten zbiór? Ile jest takich wyników n-krotnego rzutu monetą, w których w dwu pierwszych rzutach wypadnie reszka?

Wynik doświadczenia losowego, które przebiaga etapami, przedstawiamy jako ciąg wyników kolejnych etapów.

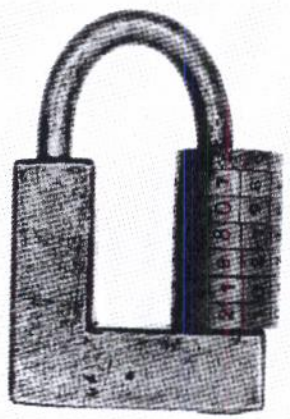
8.18. Wynikiem pojedynczego rzutu kostką do gry jest liczba wyrzuconych oczek. Określ zbiór Ω wyników k-krotnego rzutu kostką. Ile jest tych wyników? Niech $k = 6$. Ile jest wyników sześciokrotnego rzutu kostką, w których wypadną wszystkie liczby oczek?

□ Niech $K = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Każdy wynik k-krotnego rzutu kostką jest k-wyrazową wariacją zbioru K. Wyraz j-ty tej wariacji jest liczbą oczek wyrzuconych za j-tym razem ($j = 1, 2, 3, \ldots, k$). Zbiór Ω wyników k-krotnego rzutu kostką jest więc zbiorem $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^k$.

W przypadku sześciokrotnego rzutu kostką jest $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^6$. Każdy wynik sześciokrotnego rzutu kostką, w którym wypadły wszystkie liczby oczek, jest permutacją zbioru K. Jest zatem 6! takich wyników.

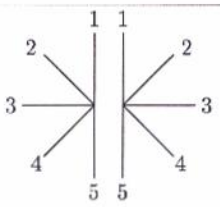
8.19. Kłódka z rysunku 108 otwiera się i zamyka na szyfr. Aby otworzyć kłódkę trzeba każdy z sześciu pierścieni ustawić (wzdłuż pionowej kreski na dole kłódki) na odpowiednim sektorze. Każdy pierścień ma 10 takich sektorów, oznaczonych cyframi $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Ile można skonstruować takich kłódek, aby każda miała inny szyfr?

8.20. Kłódkę z rys. 108 autor znalazł na strychu. Od dawna leżała tam nie używana. Nikt nie pamiętał jej szyfru. Aby można ją wykorzystać trzeba ją „rozszyfrować". Załóżmy, że na ustawienie sześciu pierścieni na sześciu sektorach wzdłuż wspomnianej linii na kłódce potrzeba 5 sekund. Przymierzasz się do rozszyfrowania tej kłódki. Ile czasu musisz sobie zarezerwować na tę pracę, aby być pewnym, że po tym czasie kłódka będzie otwarta?



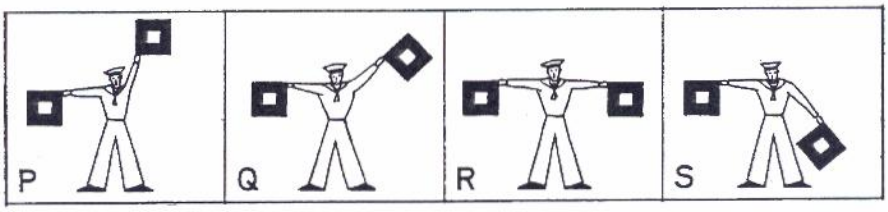
Rys. 108 Kłódka zamykana na szyfr

8.21. Marynarze floty morskiej porozumiewają się alfabetem semaforowym (sygnalizacją semaforową). Litery kodowane są układem dwu chorągiewek trzymanych w dłoniach. Jest pięć różnych położeń chorągiewki w każdej dłoni: pionowo w górę (1), ukośnie w górę (2), poziomo (3), ukośnie w dół (4) i pionowo w dół (5). Ile liter można zakodować parą chorągiewek, jeśli dwie chorągiewki są ukazywane z dwu stron sygnalisty (trzymana w lewej ręce jest ukazywana z jego lewej strony a trzymana w prawej ręce z prawej)?



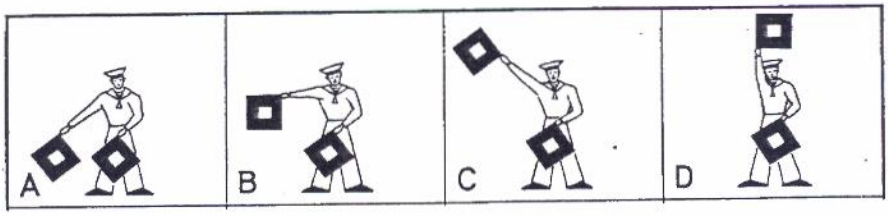
Rys. 109 Położenia chorągiewek w dłoni lewej i w dłoni prawej

Zakodujmy układ chorągiewek w dwu rękach marynarza parą j-k, gdzie j oznacza położenie lewej, a k położenie prawej chorągiewki. Układ 3-1 oznacza literę J, układ 1-4 literę K, układ 2-4 literę L itd. (por. rysunki 109 i 110). Położenie, gdy obie chorągiewki są skierowane pionowo w dół (jego kodem jest para 5-5), służy do rozdzielania słów.



Rys. 110 Niektóre układy chorągiewek jako kody liter

Każdy z możliwych układów chorągiewek w obu dłoniach jest dwuwyrazową wariacją zbioru $\{1,2,3,4,5\}$. Takich wariacji jest 5^2, czyli 25. Liter alfabetu używanego do przekazu informacji jest 32. Z tego powodu trzeba było dla niektórych liter przyjąć układ obu chorągiewek skierowanych w tę samą stronę (lewą albo prawą, por. rysunek 111).



Rys. 111 Układ dwu chorągiewek skierowanych w tę samą stronę

W XX wieku rozszyfrowano kod genetyczny, a tym samym wyjaśniono sposób dziedziczenia pewnych informacji. Informacja ta jest zakodowana w molekułach kwasu dezoksyrybonukleinowego (DNA). Różne molekuły DNA różnią się kolejnością, w jakiej występują w nich cztery zasady azotowe: adenina (a), tymina (t), gwanina (g) i cytozyna (c). Pewne trzywyrazowe wariacje zbioru $\{a,t,g,c\}$ są kodami aminokwasów. Tych aminokwasów jest 20, a n-wyrazowe wariacje zbioru tych aminokwasów tworzą kod genetyczny danego osobnika, przy czym n jest wielkością rzędu kilku milionów. W jednym chromosomie (por. s. 267) znajduje się więc kilkudziesięciomilionowy ciąg wspomnianych zasad azotowych, tworzący kod genetyczny danego osobnika. Ilość jest ogromna i tłumaczy całą różnorodność natury w okresie istnienia życia na Ziemi. Do tych rozważań związanych z procesem dziedziczenia cech powrócimy na s. 268.

8.6. Kombinacja

W grach karcianych rozdaje się na początku każdemu z graczy wylosowany podzbiór zbioru 52 kart pełnej talii.

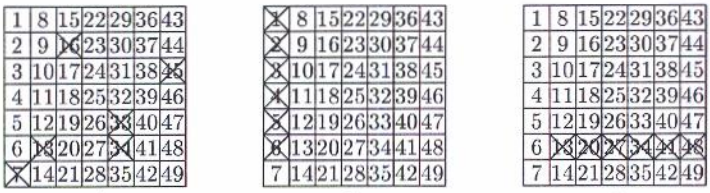
8.22. W bridżu, po potasowaniu 52 kart pełnej talii, rozdaje się graczom po 13 kart. Interesujmy się zbiorem 13 kart, które dostanie jeden z tych graczy. Ten zbiór jest wynikiem doświadczenia losowego. Z kombinatorycznego punktu widzenia jest on trzynastoelementowym podzbiorem zbioru 52 kart. Ile jest takich podzbiorów?

8.23. W niektórych wariantach gry DOMINO po wymieszaniu wszystkich 28 odwróconych kamieni (strony z oczkami nie są więc widoczne), każdy z graczy losuje po 7 kamieni. Ten wylosowany zbiór kamieni jest na początku „majątkiem" gracza. Pozostałe kamienie tworzą tzw. „bank". Interesujmy się graczem, który pierwszy losuje swój „majątek". Czym jest ten „majątek" z punktu widzenia kombinatoryki? Ile jest możliwych „majątków" tego gracza?

„Majątek" wspomnianego gracza jest siedmioelementowym podzbiorem zbioru 28 kamieni domina.

Definicja 8-4 [KOMBINACJA] Niech k będzie ustaloną liczbą naturalną nie większą od s. Każdy k-elementowy podzbiór zbioru s-elementowego S, nazywamy *k-elementową kombinacją zbioru S.*

8.24. Niech $k \leqslant s$. Z urny $U_{1\to s}$ będziemy za chwilę losować równocześnie k kul. Przed losowaniem gracz skreśla k liczb na kuponie z liczbami od 1 do s. Za wynik, którym później zakończy się to doświadczenie losowe, gracz wygrywa tyle punktów, w ilu przypadkach wylosowana liczba jest równocześnie liczbą wcześniej skreśloną na kuponie. Gracz może wypełnić dowolną liczbę kuponów. Ile ich powinien wypełnić, aby mógł być pewnym, że zdobędzie główną wygraną, tj. k punktów? Skąd znasz tego typu grę losową?



Rys. 112 Pewna prezentacja trzech sześcioelementowych kombinacji zbioru $S = \{1, 2, 3, \ldots, 49\}$

Łatwo zauważyć, że w przypadku $s = 49$ i $k = 6$ jest to popularny TOTO LOTEK. Skreślone na kuponie liczby tworzą k-elementowy podzbiór zbioru $S = \{1, 2, 3, \ldots, s\}$. Wynik losowania jest k-elementową kombinacją zbioru S.

Na rysunku 112 mamy trzy tabele z liczbami od 1 do 49, zapisanymi w układzie siedmiu wierszy i siedmiu kolumn. W każdej tabeli skreślono sześć liczb. Każda tabela przedstawia sześcioelementowy podzbiór zbioru $S* = \{1, 2, 3, \ldots, 49\}*$, a więc sześcioelementową kombinację tego zbioru. Stanowią ją skreślone liczby. Tabela z rysunku 112*a* przedstawia kombinację $\{7, 16, 13, 33, 34, 45\}$. Te tabele przypominają nam trzy wypełnione kupony TOTO LOTKA.

Liczbę k-elementowych kombinacji zbioru s-elementowego oznacza się w kombinatoryce przez $\binom{s}{k}$.

Aby gracz miał pewność, że uzyska główną wygraną, musi wypełnić tyle kuponów, ile jest możliwych wyników losowania, przy czym każde dwa kupony muszą się różnić przynajmniej jedną skreśloną liczbą.

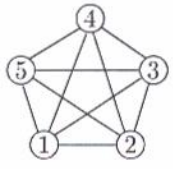
Zajmijmy się procesem skreślania liczb na kuponie. Gracz skreśla liczby kolejno. Ale ta kolejność nie jest w końcu istotna. Ten sam kupon można wypełnić (biorąc pod uwagę kolejność!) na $k!$ sposobów. Każdy z tych sposobów przedstawia k-wyrazową wariację bez powtórzeń zbioru S. Wynika stąd, że wszystkich różnie wypełnionych kuponów (a więc tym samym k-elementowych podzbiorów zbioru S) jest $k!$ razy mniej niż k-wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru S. Liczba k-elementowych kombinacji zbioru s-elementowego jest zatem ułamkiem $\frac{s!}{k!(s-k)!}$, a więc

$$\binom{s}{k} = \frac{s!}{k! \cdot (s-k)!}.$$

Przedstawiona tu idea zliczania k-elementowych kombinacji zbioru S przypomina sposób zliczania baranów tak, że najpierw zlicza się ich nogi i uzyskaną liczbę dzieli przez 4, bo 4 nogi to jeden baran.

8.25. W TOTO LOTKU losuje się równocześnie 6 kul z urny $U_{1\to 49}$ o 49 ponumerowanych kulach. Ile musiałbyś wypełnić kuponów TOTO LOTKA i jak, aby być pewnym, że w najbliższym losowaniu będziesz posiadaczem głównej wygranej, którą dostaje się za 6 trafnie wytypowanych liczb?

Równoczesne losowanie dwóch kul z urny $U_{1\to 5}$ jest doświadczeniem losowym. Jego wynik jest zbiorem dwu wylosowanych kul, a więc dwuelementową kombinacją zbioru pięciu ponumerowanych kul. Ten wynik możemy zakodować (przedstawiać na gruncie matematyki) jako dwuelementową kombiancję zbioru $\{1,2,3,4,5\}$. Na rysunku 113 taką kombinację przedstawiono za pomocą odcinka łączącego dwie wylosowane kule.



Rys. 113 Odcinki jako wyniki losowania dwu kul z urny $U_{1\to 5}$

Rysunek 113 przedstawia zatem:
— zbiór Ω wszystkich wyników równoczesnego losowania dwóch kul z urny $U_{1\to 5}$ i
— zbiór wszystkich dwuelementowych kombinacji zbioru $\{1,2,3,4,5\}$.
Z tego rysunku wynika pewna idea zliczania wszystkich dwuelementowych kombiancji dowolnego zbioru s-elementowego S. Gdyby te elementy rozmieścić w wierzchołkach s-kąta wypukłego, to każdy odcinek łączący dwa jego wierzchołki reprezentuje dwuelementowy podzbiór zbioru S. Tych podzbiorów jest zatem tyle, ile jest odcinków łączących wierzchołki s-kąta wypukłego. Z każdego wierzchołka wychodzi $(s-1)$ takich odcinków. Wierzchołków jest s, a więc iloczyn $s \cdot (s-1)$ byłby liczbą tych odcinków, tylko, że każdy został policzony dwukrotnie. Wspomnianych odcinków, a tym samym kombinacji dwuelementowych zbioru S, jest $\frac{s\cdot(s-1)}{2}$. Wynika stąd, że:

$$\binom{s}{2} = \frac{s \cdot (s-1)}{2}.$$

8.26. Na spotkanie przybyło s osób. Każda przywitała się z każdą. Ile było uścisków dłoni na powitaniu?

8.27. Każde z r państw ma w każdym z pozostałych państw swego ambasadora. Ilu jest ambasadorów?

8.28. W zawodach sportowych bierze udział k drużyn. W ćwierćfinałach każda musi rozegrać mecz z każdą. Ile będzie meczów?

8.29. W turnieju szachowym, gdzie każdy rozgrywał partię z każdym, rozegrano 28 meczów. Ilu zawodników brało udział w tym turnieju?

□ Każda partia szachów jest jednoznacznie określona przez dwu zawodników rozgrywających tę partię. Ci zawodnicy tworzą dwuelementową kombinację zbioru wszystkich uczestników turnieju. Załóżmy, że jest ich n. Liczba meczów jest w tej interpretacji liczbą dwuelementowych kombinacji zbioru n-elementowego, a tym samym liczbą odcinków łączących wierzchołki n-kąta wypukłego. Wzór na tę liczbę odkryliśmy wyżej. Szukane n spełnia więc warunek:

$$\binom{n}{2} = 28, \quad \text{albo (co na jedno wychodzi)} \quad \frac{n\cdot(n-1)}{2} = 28.$$

Rozwiązanie zadania sprowadza się do rozwiązania (w zbiorze liczb naturalnych!) równania $n(n-1) = 56$. Jest to równanie kwadratowe $n^2 - n - 56 = 0$, którego wyróżnik $\Delta = 225$, a zatem $\sqrt{225} = 15$ oraz

$$n_1 = \frac{1-15}{n} = -7 \quad \text{lub} \quad n_2 = \frac{1+15}{2} = 8.$$

Rozwiązaniem równania jest zbiór $\{-7, 8\}$, ale rozwiązaniem zadania jest $n_2 = 8$. W turnieju uczestniczyło zatem 8 zawodników.

Rozwiązanie równania $n(n-1) = 56$ można było uzyskać natychmiast. Chodzi bowiem o znalezienie dwóch kolejnych liczb naturalnych, których iloczyn jest równy 56. Jest $7 \cdot 8 = 56$.

8.30. Na płaszczyźnie jest n punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Ile różnych prostych wyznaczają te punkty?

8.31. Na okręgu wyróżniono 9 punktów. Ile jest trójkątów, których wierzchołkami są te punkty?

Ostatnio stały się popularne szyfrowe kłódki i zamki do zamykania drzwi piwnic, garaży lub innych pomieszczeń. W niektórych typach szyfrowych zamków czy kłódek jest 10 przycisków oznaczonych cyframi od 0 do 9. Niech $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Aby otworzyć zamek (kłódkę) trzeba nacisnąć k z tych dziesięciu przycisków, gdzie $1 < k < 10$. Kolejność ich naciskania nie jest ważna. Numery przycisków, których naciśnięcie powoduje otwarcie kłodki, stanowią szyfr tej kłódki. Szyfr jest zatem k-elementową kombinacją zbioru C. Ten szyfr zna tylko właściciel kłódki. Dwie szyfrowe kłódki tego typu mamy na rysunku 114.

Nie jest niemożliwe, że złodziej, który nie zna szyfru, a który będzie „na chybił trafił" dobierał k przycisków (jeśli wie, że kod jest złożony z k cyfr!), otworzy kłódkę. Właściciel chronionego przez tę kłódkę majątku, będzie mówił o pewnym ryzyku. Dalej zajmiemy się oceną tego ryzyka i wnioskami, jakie dla praktyki wynikają z jego wielkości.

8.32. Fabryka produkuje dwa rodzaje opisanych kłódek. Dla kłódek pierwszego typu jest $k = 4$, dla kłódek drugiego typu jest $k = 6$. Ile można wyprodukować różnych kłódek pierwszego, a ile drugiego typu. Powszechnie się sądzi, że kłódek pierwszego typu jest więcej niż drugiego. Jest tak naprawdę?



Rys. 114 Trzy kłódki zamykane na szyfr

8.33. Sklep oferuje trzy kłódki zamykane na szyfr, przedstawione na rysunku 114.
a) Aby otworzyć pierwszą z tych kłódek trzeba nacisnąć cztery z dziesięciu przycisków oznaczonych cyframi od 0 do 9. Cyfry tych przycisków stanowią szyfr kłódki i są znane tylko właścicielowi kłódki. Kolejność naciskania nie gra roli. Czym jest szyfr tej kłódki? Ile jest różnych kłódek tego typu?
b) Druga kłódka z rysunku 114 otwiera się po wciśnięciu sześciu przycisków. Ile jest szyfrów tego typu kłódki?
c) Aby otworzyć trzecią kłódkę z rysunku 114 trzeba każdy z czterech pierścieni ustawić na odpowiednim sektorze. Każdy pierścień ma 10 tych sektorów i są one ponumerowane od 0 do 9. Ile można wyprodukować tego typu kłódek różnych między sobą[8].

□ Rozważmy kłódkę z dziesięcioma przyciskami. Niech $C = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Szyfr pierwszej kłódki z rysunku 114 jest czteroelementową kombinacją zbioru C, szyfr kłódki drugiej jest sześcioelementową kombinacją zbioru C. Ilekroć naciśniemy 4 przyciski, tylekroć pozostanie 6 przycisków nienaciśniętych. Wynika stąd, że *„każdy czteroelementowy podzbiór zbioru C określa jednoznacznie sześcioelementowy podzbiór tego zbioru*, a więc że $\binom{10}{4} = \binom{10}{6}$. Liczba czteroelementowych kombinacji zbioru C jest zatem równa liczbie sześcioelementowych kombinacji tego zbioru, czyli $\binom{10}{4} = \binom{10}{6}$.

Wykazaliśmy tym samym, że kłódek pierwszego typu jest tyle samo, co kłódek drugiego typu. Jest $\binom{10}{4} = 210$. Rozwiązanie ostatnich zadań podsuwa ideę dowodu znanej kombinatorycznej tożsamości:

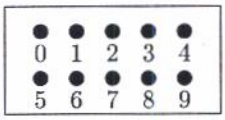
$$\binom{s}{k} = \binom{s}{s-k}.$$

Ta równość wynika z faktu, że: *Każdy k-elementowy podzbiór zbioru s-elementowego S określa jednoznacznie podzbiór $(s-k)$ pozostałych elementów tego zbioru S.*

[8]Czym jest (z kombinatorycznego punktu widzenia) szyfr takiej kłódki i co może w tej sytuacji oznaczać, że dwie kłódki są różne?

Szyfr pierwszej i trzeciej kłódki z rysunku 114 tworzą 4 cyfry. Ale w przypadku trzeciej kłódki ważna jest kolejność, przy czym cyfry mogą się powtarzać. Szyfr pierwszej kłódki jest czteroelementową kombinacją zbioru $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, szyfr trzeciej kłódki jest czterowyrazową wariacją tego zbioru.

W latach 90. ub. wieku drzwi wejściowe do budynków w Moskwie zamykane były na zamek szyfrowy o prostej konstrukcji (jest więc dużo tańszy od domofonu). Widoczna część zamka składa się z prostokątnej tablicy z dziesięcioma ponumerowanymi przyciskami (zob. rysunek 115). Żeby otworzyć drzwi, trzeba nacisnąć równocześnie trzy przyciski oznaczone cyframi kodu.

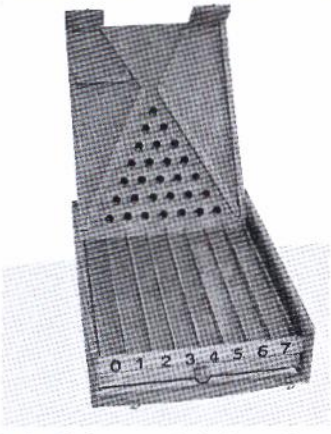


Rys. 115 Tablica z przyciskami – zewnętrzna część szyfrowego zamka u drzwi

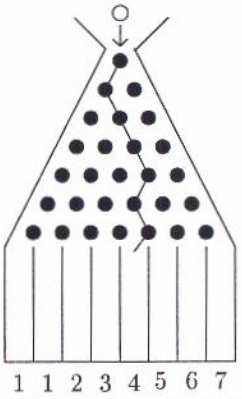
8.34. Czym jest szyfr opisanego zamka do drzwi? Ile jest różnych sposobów zakodowania zamka do drzwi wejściowych z rysunku 115? Który z opisanych wcześniej zamków działa analogicznie?

8.7. Deska Galtona

Rysunek 116 przedstawia przyrząd losujący zwany *deską Galtona*[9]. Skada się on z pudełka podzielonego na 8 przegródek ponumerowanych od 0 do 7 i nachylonej do niego przykrywki. Na tej przykrywce rozmieszczono w siedmiu rzędach kołki w kształcie walca. Jeśli w górnym otworze na przykrywce umieścimy kulkę, to zgodnie z prawami fizyki kula zacznie spadać w dół. Ale na swej drodze spotyka kołki. Przypadek rozstrzyga, w którym kierunku: w dół na lewo (↙), czy w dół na prawo (↘), skieruje się spadająca kulka przy zetknięciu się z kołkiem. Przypadek rozstrzyga więc do której przegródki kulka trafi. Te ponumerowane przegródki nazywajmy *metami*. Spadanie kulki po desce Galtona z rys. 116 jest doświadczeniem losowym o siedmiu etapach.



Rys. 116 Deska Galtona o siedmiu poziomach kołków



Rys. 117 Rozmieszczenie kołków na desce Galtona

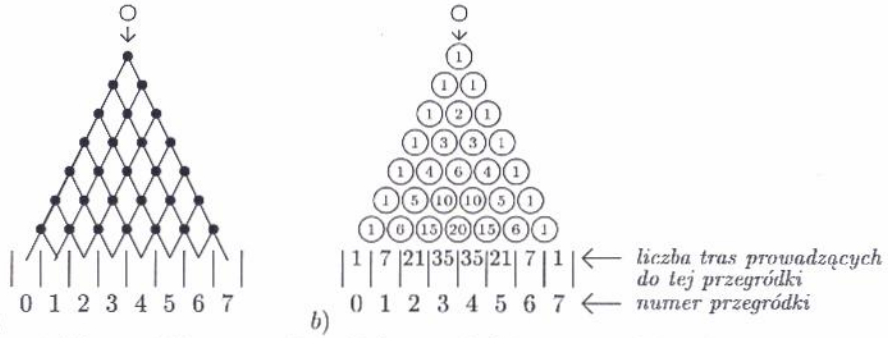
[9]Francis Galton (1822-1911), angielski przyrodnik

W ogólnym przypadku na desce jest n poziomów kołków a więc jest $n+1$ przegródek ponumerowanych liczbami $0, 1, \ldots, n$.

8.35. Interesuje nas trasa spadania kulki po desce Galtona. Ile jest tych tras na desce z rysunku 116, a ile na desce mającej n poziomów kołków i $n+1$ met? Każdą trasę możemy uważać za wynik spadania kulki po desce Galtona.

□ Trasa spadania kulki po desce Galtona z rysunku 116 składa się z siedmiu odcinków. Kierunek ↘ kodujmy cyfrą 1, kierunek ↙ zaś cyfrą 0. Kodem trasy spadania staje się przy tej umowie siedmiowyrazowa wariacja zbioru $\{0,1\}$. Na rysunku 117 zaznaczono jedną możliwą trasę. Jej kodem jest wariacja 0111010.

Kodem każdej trasy na desce Galtona o n poziomach kołków jest n-wyrazowa wariacja zbioru $\{0,1\}$. Takich wariacji, a tym samym tras na desce, mamy 2^n.

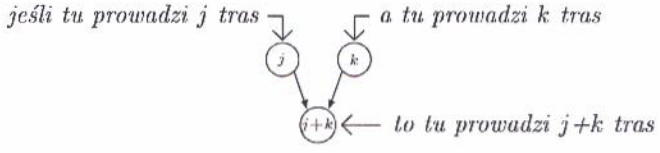


Rys. 118 Schemat labiryntu na desce Galtona o siedmiu poziomach kołków i liczby tras prowadzących do met

8.36. Ile jest możliwych tras spadania prowadzących – na desce Galtona o n poziomach kołków – do mety numer k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$?

Trasa prowadzi do mety k wtedy i tylko wtedy, gdy dokładnie k jej odcinków skierowanych jest w dół na prawo. Kodem każdej takiej trasy jest taka n-wyrazowa wariacja zbioru $\{0,1\}$, która ma dokładnie k wyrazów równych 1. W zadaniu pytamy więc, ile jest takich wariacji. Zamiast pytania ile? zapytajmy na ile sposobów możemy taką wariację utworzyć. Aby określić taką wariację wystarczy spośród n miejsc wybrać k miejsc, na których postawimy cyfrę 1 (na pozostałych miejscach postawimy cyfrę 0). To da się wykonać na $\binom{n}{k}$ sposobów. Do mety o numerze k prowadzi $\binom{n}{k}$ tras $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

Schemat labiryntu, jaki tworzą kołki na desce Galtona z rysunku 116 przedstawiono na rysunku 118*a*. Rysunek 118*b* ukazuje, jak możemy etapami znajdować liczby tras prowadzących do poszczególnych przegródek na desce. Rysunek 119 ukazuje, jak znajduje się te liczby na kolejnych etapach trasy spadania.



Rys. 119 Jak powstaje trójkąt Pascala

Rysunek 119 prezentuje pewien algorytm, za pomocą którego tworzy się szczególny układ liczb naturalnych. Ten układ liczb nazywamy *trójkątem Pascala.*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}$$

.....

Wszystkich tras na desce Galtona o n poziomach kołków mamy 2^n. Jeśli zbiór tych tras sklasyfikujemy pod kątem mety, do której trasa prowadzi, liczba wszystkich tras staje się sumą

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n},$$

a więc dostajemy równość:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

8.37. Wynik n-krotnego rzutu monetą jest n-wyrazowym ciągiem o wyrazach ze zbioru $\{o, r\}$ (jest to zbiór dwóch możliwych wyników pojedynczego rzutu monetą, por. zadanie 8.17). Wyraz j-ty tego ciągu oznacza wynik j-tego rzutu. Ile jest takich wyników n-krotnego rzutu, w których litera r (reszka) występuje k razy ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$)?

8.8. Dwumian Newtona

Zauważmy, że:

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= a+b \\
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
(a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.
\end{aligned}$$

Wyrazami n-tego wiersza trójkąta Pascala są współczynniki wielomianu, który jest rozwinięciem n-tej potęgi dwumianu $(a+b)$.

Twierdzenie 8-4 [WZÓR DWUMIANOWY NEWTONA] *Jeżli a i b są liczbami rzeczywistymi i $n \in \mathbb{N}$, to*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k = \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}a^0b^n,$$

gdzie $a^0 := 1$ i $b^0 := 1$.

8.38. Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona:
a) przedstaw w postaci wielomianu wyrażenia: $(2x - \pi)^4$ oraz $(2a^2 + 3b^3)^5$,
b) znajdź współczynnik w tym składniku rozwinięcia $(a + a^2)^{15}$, który zawiera a^{17},
c) oblicz $(1 + \frac{1}{n})^6$ i $(x - 2y)^5$.

8.39. Stosując wzór dwumianowy Newtona oblicz $(1\frac{1}{10})^5$.

□ Mamy tu $1\frac{1}{10} = 1 + \frac{1}{10}$ oraz

$(1+\frac{1}{10})^5 =$

$\binom{5}{0}1^0(\frac{1}{10})^5 + \binom{5}{1}1^1(\frac{1}{10})^4 + \binom{5}{2}1^2(\frac{1}{10})^3 + \binom{5}{3}1^3(\frac{1}{10})^2 + \binom{5}{4}1^4(\frac{1}{10})^1 + \binom{5}{5}1^5(\frac{1}{10})^0 =$

$(\frac{1}{10})^5 + 5\cdot(\frac{1}{10})^4 + 10\cdot(\frac{1}{10})^3 + 10\cdot(\frac{1}{10})^2 + 5\cdot(\frac{1}{10})^1 + 1\cdot(\frac{1}{10})^0 =$

$\frac{1}{100000} + 5\cdot(\frac{1}{10000}) + 10\cdot(\frac{1}{1000}) + 10\cdot(\frac{1}{100}) + 5\cdot(\frac{1}{10}) + 1 =$

$0,00001 + 0,0005 + 0,01 + 0,1 + 0,5 + 1 = 1,61051.$

8.40. Zapisz w postaci wielomianu wyrażenie $(x^2-2x)^5$.

□ Ze wzoru dwumianowego Newtona dostajemy:
$(x^2-2x)^5 = \binom{5}{0}(x^2)^0(-2x)^5+\binom{5}{1}(x^2)^1(-2x)^4+\binom{5}{2}(x^2)^2(-2x)^3+\binom{5}{3}(x^2)^3(-2x)^2+\binom{5}{4}(x^2)^4(-2x)^1+\binom{5}{5}(x^2)^5(-2x)^0 = -32x^5+5x^2\cdot 16x^4+10x^4(-8x^3)+10x^6\cdot 4x^2+5x^8(-2x)+x^{10} = -32x^5+80x^6-80x^7+40x^8-10x^9+x^{10}.$

8.9. Różne zadania z kombinatoryki

8.41. W latach 70. i 80. XX wieku numery rejestracyjne prywatnych samochodów w Polsce składały się z trzech liter, po których następował ciąg czterech cyfr. W województwie krakowskim pierwszą literą numeru rejestracyjnego było K, drugą – była jedną z trzech liter: R,W i K. Ile można było wtedy zarejestrować prywatnych samochodów w województwie krakowskim?

8.42. Ile jest liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach? Ile jest wszystkich liczb czterocyfrowych?

8.43. Na biletach tramwajowych w Krakowie w latach siedemdziesiątych znajdował się kwadrat podzielony na 9 pól. Kasownik dziurkował albo dwa, albo trzy, albo cztery, albo pięć z tych pól. Każdy wagon tramwajowy powinien mieć inny sposób kasowania biletu. Dla ilu wagonów wystarczyło takich różnych sposobów kasowania?

8.44. Na kamieniach zwykłego domina są pola z liczbami oczek od 0 do 6. W dominie SEWASTOPOL kamienie mają pola z liczbami oczek od 0 do 9. Ile kamieni ma to domino?

8.45. W grze w bridża gracz dostaje 13 kart wylosowanych ze zbioru 52 kart. Niech $j = 0,1,2,3,4$. Ile jest takich wyników opisanego doświadczenia losowego, w których wśród 13 kart jest dokładnie j asów?

8.46. W klubie brydżystów spotkało się 12 osób. Na ile sposobów można wyłonić trzy drużyny do bridża?

8.47. Z okazji Nowego Roku każda z dziesięciu współpracujących ze sobą firm wysyła każdej życzenia drogą pocztową. Znaczek na list kosztuje 1 zł 50 gr. Ile Poczta Polska zarobi na tej procedurze?

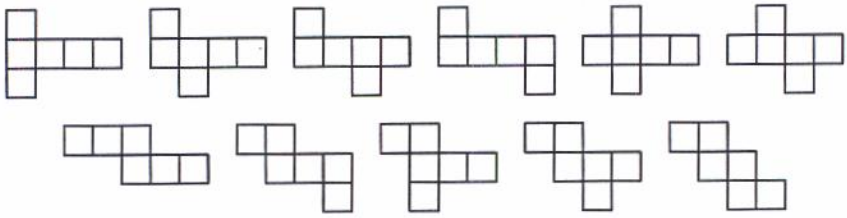
8.48. Ile trójkątów wyznaczają wierzchołki dwunastokąta wypukłego?

8.49. Ile liczb czterocyfrowych podzielnych przez 4 można utworzyć z cyfr $1,2,3,4,5$?

8.50. *Inicjałami* człowieka nazywamy parę liter, z których pierwsza jest pierwszą literą imienia, druga zaś pierwszą literą nazwiska (por. s. 40). Wykaż, że w miasteczku, w którym żyje 1 000 mieszkańców, co najmniej dwaj mają te same inicjały.

8.51. Na rysunku 120 mamy jedenaście siatek sześcianu. W przypadku każdej z tych siatek, po zgięciu wzdłuż linii łączących kwadraty powstaje sześcian. Udowodnij, że są to

wszystkie możliwe siatki sześcianu. Co ma do tego kombinatoryka?

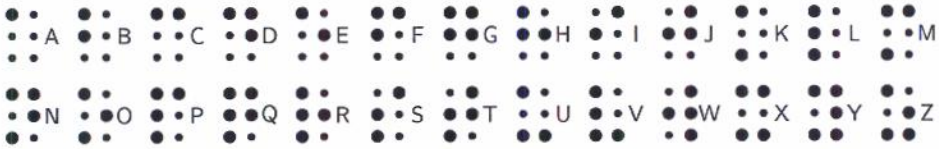


Rys. 120 Jedenaście siatek sześcianu

[ALFABET MORSE'A] Do porozumiewania się na odległość za pomocą telegrafu, wykorzystuje się alfabet Morse'a. Tworzy się go z dwóch znaków: kreski (−) i kropki (•) lub sygnałów krótkich i długich. Na ten alfabet składają się litery, cyfry i znaki przestankowe. Kody są różnej długości. Kodem litery *E* jest „kropka". Kodem litery Ż jest ciąg (−, −, •, •, −). Najdłuższe kody w tym alfabecie są pięciocyfrowe.

8.52. Ile znaków można zakodować ciągami kropek i kresek, jeśli te ciągi mogą być co najwyżej pięciowyrazowe (jeden wyraz to kropka albo kreska)? Na kody ilu znaków starczyłoby ciągów, gdyby ich maksymalne długości ograniczyć do 4?

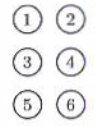
[ALFABET BRAILLE'A] Rysunek 121 przedstawia alfabet Braille'a. Kodem każdej litery jest układ małych i dużych kropek rozmieszczonych na sześciu miejscach. Takie rozmieszczenie nazywamy *kodem kropkowym*.



Rys. 121 Alfabet Braille'a

8.53. Oprócz liter trzeba jeszcze zakodować opisanym sposobem cyfry, znaki przestankowe itd. Ile znaków da się zakodować wspomnianym kodem kreskowym?

□ Sześć miejsc, na których są rozmieszczane małe i duże kropki, można ponumerować. Jeśli te miejsca ponumerujemy tak, jak na rys. 122 i jeśli małą kropkę oznaczymy cyfrą 0, dużą zaś cyfrą 1, to rozmieszczenie staje się sześciowyrazową wariacją zbioru $\{0,1\}$. Kod kropkowy litery A jest w tej interpretacji wariacją 100000, kod litery H jest wariacją 101100, kod litery S – wariacją 011010.



Rys. 122

Kodem kropkowym, o jakim tu mowa, można zakodować tyle znaków, ile jest sześciowyrazowych wariacji zbioru $\{0,1\}$, a więc 2^6, czyli 64.

8.54. W podrzędnym barze wisi ogłoszenie: „Polecamy ponad 150 000 różnych zestawów obiadowych". W jadłospisie zaś figuruje: 7 zup, 8 surówek, 10 dań mięsnych,

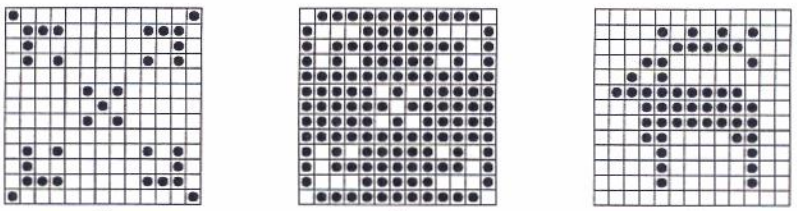
ziemniaki, kasza i ryż, 10 napojów i 10 różnych rodzajów ciastek. W reklamach jest na ogół sporo nieprawdy. Czy ta reklama kłamie?

8.55. Zbiór X ma k elementów, zbiór Y ma ich s, gdzie $k \in \mathbb{N}_2$ i $s \in \mathbb{N}_2$.
1) Ile jest funkcji ze zbioru X w zbiór Y?
2) Załóżmy, że $k \leqslant s$. Ile jest funkcji różnowartościowych ze zbioru X w zbiór Y?
3) Niech $k = s$. Ile jest bijekcji ze zbioru X na zbiór Y?

8.56. Będziesz zaginać kartkę papieru na pół, tak zgiętą kartkę znów na pół i tak aż 50 razy. Jak gruby powstanie plik papieru po takiej procedurze? Oceń tę grubość tak, jak ci podpowiada intuicja. Porównaj tę ocenę z rezultatem rachunków. Abstrahujemy tu od fizycznych możliwości wykonywania aż tylu zgięć. Uwaga: Książka, która liczy 150 stron ma grubość 1 cm, a średnia odległość Ziemi o Słońca wynosi 150 000 000 km.

□ Grubość stosu będzie równa 15 011 998 757 901,7 cm, czyli około 150 119 987,6 km, czyli więcej niż odległość Ziemi od Słońca.

8.57. Planszą do japońskiej gry GO jest kwadrat podzielony na 169 kwadratowych oczek w układzie 13 × 13. W każdym oczku można postawić czarny kamień lub nie. Nazwijmy *obrazem* każde możliwe zapełnienie czarnym kamieniem co najmniej jednego i co najwyżej 168 oczek. Trzy takie obrazy mamy na rysunku 123. Ile jest takich obrazów?



Rys. 123 Trzy obrazy powstałe na planszy gry GO

□ Jeśli oczka planszy ponumerujemy liczbami od 1 do 169, to każdy obraz można zakodować ciągiem o 169 wyrazach ze zbioru $\{0,1\}$ (wyraz j-ty jest równy 1, jeśli w j-tym oczku leży kamień, jeśli w tym oczku nie ma kamienia, to ten wyraz ciągu jest równy 0). Kodem każdego obrazu jest więc 169-wyrazowa wariacja zbioru $\{0,1\}$.

Jeśli wspomniany zbiór obrazów poszerzyć o dwa skrajne przypadki:
— w żadnym oczku nie ma kamienia (kodem tego obrazu jest ciąg 169 zer) i
— w każdym oczku leży kamień (kodem tego obrazu jest ciąg 169 jedynek),
to liczba wszystkich obrazów jest równa 2^{169}.

Czy wyobrażamy sobie, jak wielka jest to liczba? Jest:

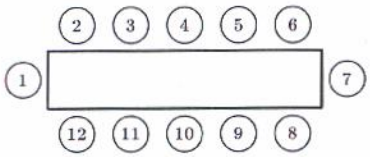
$$2^{169} = 748\,288\,838\,313\,422\,294\,120\,286\,634\,350\,736\,906\,063\,837\,462\,003\,712.$$

Rząd wielkości liczby 2^{169} można oszacować następująco (por. [4]):

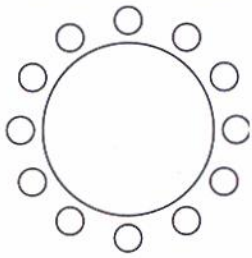
$$2^{169} \approx 2^{170} = (2^{10})^{17} = (1024)^{17} \approx (10^3)^{17} = 10^{51}.$$

Masa Ziemi wynosi około 10^{51} nukleonów. Liczba możliwych obrazów jest więc bliska liczbie wszystkich nukleonów Ziemi.

8.58. Kostkę sześcienną o krawędzi 1 m pocięto na małe kostki o krawędzi 1 mm i z otrzymanych sześcianików ułożono chodnik o szerokości 1 mm (łącząc sześcianiki ścianami). Załóżmy, że malutki pojazd będzie się poruszał po tym chodniku z prędkością 50 km/godz. Ile czasu zabierze mu pokonanie tej drogi?



Rys. 124 Ponumerowane miejsca przy prostokątnym stole



Rys. 125 12 miejsc przy okrągłym stole

8.59. Rodzina Nowaków składa się z babci, dziadka, ojca, matki, trzech córek, dwóch synów i trojga wnucząt. Wszyscy codziennie spożywają wspólnie śniadanie, obiad i kolację przy rodzinnym prostokątnym stole (rys. 124). Dziadek wpadł na pomysł, aby do każdego posiłku rozsiadać się przy stole inaczej. — *Aby wyczerpać wszystkie możliwości potrzeba kilku miesięcy. No i codziennie trzeba zapisywać, kto na jakim siedział miejscu przy śniadaniu, na jakim przy obiedzie, a na jakim przy kolacji* — oznajmiła mama. — *Myślę, że potrzeba na to kilku lat i ja mogę tego już nie dożyć!* – stwierdziła babcia. Ile dni potrzeba na to, aby wyczerpać wszystkie rozmieszczenia dwunastu osób przy prostokątnym stole?

8.60. Rodzina Kowalskich także liczy dwanaście osób, ale śniadania, obiady i kolacje Kowalscy spożywają wspólnie przy okrągłym stole dwunastoosobowym (zob. rysunek 125).
1. Ile dni w tym przypadku potrzeba na to, aby wyczerpać wszystkie możliwe rozmieszczenia dwunastu osób na dwunastu miejscach przy tym stole?
2. Na ile sposobów można rozmieścić n osób przy okrągłym stole z n krzesłami?

□ Załóżmy, że miejsca przy okrągłym stole z n krzesłami są ponumerowane od 1 do n. Jest $n!$ wszystkich rozmieszczeń uwzględniających tę numerację. Ustalmy jedno konkretne rozmieszczenie. Jeśli przy okrągłym stole każda z osób przesunie się o jedno krzesło w prawo, to nowe rozmieszczenie i poprzednie są identyczne (por. rysunek 125). Jest n takich przesunięć, które dają identyczne rozmieszczenie n osób przy stole okrągłym, a zatem różnych rozmieszczeń jest $\frac{n!}{n}$. Jest zatem $(n-1)!$ tych sposobów.

8.61. W XVII wieku, wybierając się jako poseł do Rzymu, Jerzy Ossoliński (chcąc olśnić wszystkich swoim bogactwem) zamówił u kowala srebrne podkowy i złote hufnale[10] do ich przybicia (po sześć dla każdej podkowy). Kwotę 1000 dukatów, jaką wstępnie zaproponował kowal za tę usługę, Ossoliński uznał za zbyt wygórowaną. Kowal zaproponował inną zapłatę. — *Cztery srebrne podkowy, zrobię za darmo, ale za hufnale prosze mi wypłacić kwotę następująco: za pierwszy hufnal 2 dukaty, za drugi 4 dukaty, za trzeci 8 dukatów itd., za każdy następny dwa razy więcej dukatów niż za poprzedni.* Ossoliński wyliczył, że za hufnale do pierwszej podkowy zapłaci zaledwie 126 dukatów, kwota za wszystkie hufnale do czterech podków wydała mu się niewysoka. Tymczasem rachunek kowala za tę usługę wręczony Ossolińskiemu na pergaminie okazał się dla niego wielkim zaskoczeniem. Ile warta była ta usługa?

[10] hufnal (niem. Hufnagel), gwóźdź do przybijania podkowy koniom, *Słownik wyrazów obcych*, PWN, Warszawa 1993, s. 347.

9. Rachunek prawdopodobieństwa

9.1. Przestrzeń probabilistyczna

Definicja 9-1 [PRZESTRZEŃ PROBABILISTYCZNA] Niech Ω będzie dowolnym niepustym zbiorem skończonym. Załóżmy, że $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_s\}$ a p jest funkcją określoną na zbiorze Ω, nieujemną i spełniającą warunek

(*) $\quad p(\omega_1) + p(\omega_2) + p(\omega_3) + \cdots + p(\omega_s) = 1.$

Funkcję p nazywamy *rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze* Ω (por. def. 4-6) a parę (Ω, p) nazywamy *przestrzenią probabilistyczną.*

Definicja 9-2 [KLASYCZNA PRZESTRZEŃ PROBABILISTYCZNA] Jeśli

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s\} \quad \text{i} \quad p(\omega_1) = p(\omega_2) = \ldots = p(\omega_s) = \tfrac{1}{s},$$

to funkcję p nazywamy *klasycznym rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze* Ω, a parę (Ω, p) nazywamy *klasyczną przestrzenią probabilistyczną.*

■ Niech $\Omega_1 = \{\alpha, \beta\}$ i $p_1(\alpha) = p_1(\beta) = \frac{1}{2}$. Funkcja p_1 jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze Ω_1. Para (Ω_1, p_1) jest więc przestrzenią probabilistyczną. Jest to klasyczna przestrzeń probabilistyczna.

■ Niech $\Omega_2 = \{\bullet, \bigstar, \ominus, \triangle\}$ oraz $p_2(\bullet) = \frac{1}{5}$, $p_2(\bigstar) = \frac{2}{5}$, $p_2(\oplus) = \frac{1}{10}$ i $p_2(\triangle) = \frac{3}{10}$. Funkcja p_2 jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze Ω_2, a więc para (Ω_2, p_2) jest przestrzenią probabilistyczną.

■ Niech $\Omega_3 = \{a, b, c\}$ i $p_3(a) = \frac{1}{3}$ i $p_3(b) = 0$ i $p_3(c) = \frac{2}{3}$. Para (Ω_3, p_3) jest przestrzenią probabilistyczną.

Definicja 9-3 [ROZKŁAD DWUMIANOWY] Niech u będzie dowolną ustaloną liczbą rzeczywistą z przedziału $(0, 1)$, n zaś ustaloną liczbą naturalną większą od 1. Funkcję p_n określoną wzorem

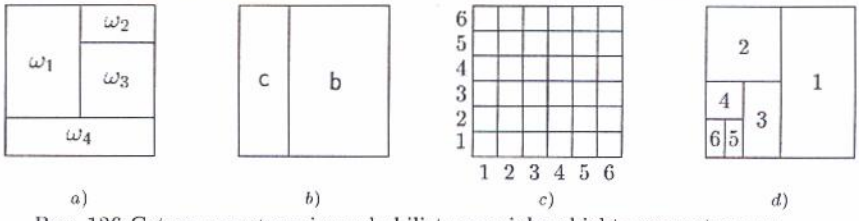
$$p_n(k) = \binom{n}{k} u^k (1-u)^{n-k} \text{ dla } k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

nazywamy *rozkładem dwumianowym* albo *rozkładem Bernoulliego.*

Funkcje p_1 i p_2 określone na s. 42 (zad. 4.11 i 4.12) są rozkładami dwumianowymi.

9.1. Wykaż, że rozkład dwumianowy $p_n(k) = \binom{n}{k} u^k (1-u)^{n-k}$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze $\Omega_n = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

Podzielmy kwadrat o polu 1 na skończoną (bądź przeliczalną) ilość prostokątów jak na rysunku 126. Mówimy, że na kwadrat jednostkowy zostaje *narzucona prostokątna sieć*, prostokąty nazywa się *oczkami sieci.* Funkcja, która każdemu z oczek sieci przypisuje jego pole, jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze oczek tej sieci.



Rys. 126 Cztery przestrzenie probabilistyczne jako obiekty geometryczne

■ Rysunek 126*a* przedstawia przestrzeń probabilistyczną (Ω_4, p_4), gdzie
$\Omega_4 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ oraz $p_4(\omega_1) = \frac{3}{8}$, $p_4(\omega_2) = \frac{1}{8}$, $p_4(\omega_3) = \frac{1}{4}$ i $p_4(\omega_4) = \frac{1}{4}$.

■ Rysunek 126*b* prezentuje przestrzeń probabilistyczną (Ω_5, p_5), gdzie
$\Omega_5 = \{\mathsf{b}, \mathsf{c}\}$ i $p_5(\mathsf{b}) = \frac{2}{3}$ oraz $p_5(\mathsf{c}) = \frac{1}{3}$.

■ Niech Ω_6 oznacza zbiór 36 kwadratowych oczek sieci z rysunku 126*c*. Funkcja p_6, która każdemu z oczek przypisuje liczbę $\frac{1}{36}$ (a więc jego pole), jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze Ω_6. Para (Ω_6, p_6) jest przestrzenią probabilistyczną.

■ Rysunek 126*d* przedstawia przestrzeń probabilistyczną (Ω_7, p_7), gdzie
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i $p_7(1) = \frac{1}{2}, p_7(2) = \frac{1}{4}, p_7(3) = \frac{1}{8}, p_7(4) = \frac{1}{16}, p_7(5) = p_7(6) = \frac{1}{32}$.

9.2. Na zbiorze $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ określone są następujące funkcje:
a) $p(k) = \frac{2k}{n(n+1)}$ dla $k \in \Omega$;
b) $p(k) = u(1-u)^{k-1}$ dla $k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$ i $p(n) = (1-u)^n$, gdzie u jest ustaloną (ale dowolną) liczbą rzeczywistą dodatnią i mniejszą od 1.
Wykaż, że każda z tych funkcji jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze Ω.

9.3. Niech $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$, $p(1) = \frac{81}{121}$ i $p(k) = \frac{81}{121} \cdot (\frac{1}{3})^{k-1}$ dla $k = 2, 3, \ldots, n$. Znajdź takie n, dla którego funkcja p jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze Ω?

9.4. Niech $\Omega = \{\diamondsuit, \spadesuit, \heartsuit\}$ oraz $p(\diamondsuit) = \frac{x}{4}$, $p(\spadesuit) = \frac{x^2}{4}$ i $p(\heartsuit) = \frac{1}{2}$. Dla jakiego x funkcja p jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze $\{\diamondsuit, \spadesuit, \heartsuit\}$?

9.5. Niech $\Omega = \{1, 2, \ldots, 9\}$ oraz $p(1) = \frac{1}{10}$, $p(k) = \frac{1}{10} + (k-1) \cdot c$, dla $k = 2, 3, \ldots, 9$. Dla jakiego c funkcja p jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze Ω?

9.6. Niech m będzie ustaloną liczbą naturalną większą od 1. Wykaż, że funkcja p określona wzorem:

$$p(k) = \begin{cases} \frac{m^2-m+1}{m^2} & \text{dla } k = 1, \\ \frac{1}{m^2}, & \text{dla } k = 2, 3, \ldots, m, \end{cases}$$

jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze $\Omega = \{1, 2, 3 \ldots, m\}$.

9.7. Jeśli x jest liczbą rzeczywistą, to symbol $[x]$ oznacza jej część całkowitą, czyli cechę (por. zadanie 4.52 na s. 54). Niech $p(n) = [\frac{1}{n}]$ dla dowolnej liczby naturalnej n. Załóżmy, że m jest ustaloną liczbą naturalną większą od 1. Wykaż, że funkcja p jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze $\Omega_m = \{1, 2, \ldots, m\}$.

9.2. Model probabilistyczny doświadczenia losowego

Na s. 131 opisano grę typu TOTO LOTKA. Przed wykonaniem doświadczenia losowego δ gracz stawia na to, jakim zakończy się ono wynikiem i zdobywa punkt, jeśli typowanie okaże się trafne. Niech Ω będzie zbiorem możliwych wyników doświadczenia δ. Jeśli wszystkie te wyniki są jednakowo prawdopodobne, to jest obojętne, na który z nich gracz postawi. Szanse zdobycia punktu w opisanej grze nie zależą od decyzji co do obstawianego wyniku. W przeciwnym razie z dwu wyników niejednakowo prawdopodobnych bardziej opłaca się stawiać na wynik bardziej prawdopodobny. Stawianie na wynik najbardziej prawdopodobny (jeśli w zbiorze Ω taki istnieje) jest racjonalną decyzją. Aby racjonalnie uczestniczyć w opisanej grze, wystarczy dla każdego wyniku

doświadczenia losowego δ ocenić (znaleźć) prawdopodobieństwo, z jakim dowiadczenie δ może się tym wynikiem zakończyć. I w tym momencie do rozważań nad racjonalnym postępowaniem w grze wkracza matematyka. Ten praktyczny problem może tłumaczyć dlaczego będziemy dla każdego doświadczenia losowego określać zbiór jego możliwych wyników, a następnie prawdopodobieństwa tych wyników.

9.8. Z urny U, w której są 4 kule białe, 2 czerwone i 1 zielona, zostanie za chwilę wylosowana kula. Zanim to losowanie nastąpi, stawiasz na jego wynik i wygrasz punkt, jeśli typowanie okaże się trafne. Jaką podejmiesz decyzję co do obstawianego wyniku?

□ Są trzy możliwe wyniki losowania kuli z urny U:

b – `wylosowana kula będzie biała`,

c – `wylosowana kula będzie czerwona`,

z – `wylosowana kula będzie zielona`.

Tworzą one zbiór $\Omega = \{\mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{z}\}$. Nie można przewidzieć, którym z tych wyników zakończy się losowanie. Ale dla każdego wyniku można ocenić szanse, czyli prawdopodobieństwo, że losowanie zakończy się tym wynikiem. Mowa tu więc o pewnej funkcji $p : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, która wynikowi losowania przypisuje jego prawdopodobieństwo. Biorąc pod uwagę zwartość urny i fakt, że każda z kul w urnie ma w losowaniu jednakowe szanse, dostajemy, że

$$p(\mathsf{b}) = \tfrac{4}{7}, \quad p(\mathsf{c}) = \tfrac{2}{7} \quad \text{i} \quad p(\mathsf{z}) = \tfrac{1}{7}.$$

Prezentacją tej funkcji p jest następująca tabela:

$\omega \in \Omega$	b	c	z
$p(\omega)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$

Wyniki losowania nie są jednakowo prawdopodobne. Wynik b jest najbardziej prawdopodobny. Na ten wynik najbardziej opłaca się stawiać w opisanej grze.

Zauważ, że $p(\mathsf{b}) + p(\mathsf{c}) + p(\mathsf{z}) = 1$, a zatem funkcja p jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze $\Omega = \{\mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{z}\}$. Para (Ω, p) jest przestrzenią probabilistyczną.

[MODEL DOŚWIADCZENIA LOSOWEGO] Mówimy, że przestrzeń probabilistyczna (Ω, p) jest *modelem probabilistycznym*, albo krótko *modelem* doświadczenia losowego δ, jeśli:
— Ω jest zbiorem wszystkich wyników doświadczenia losowego δ i
— funkcja p przypisuje każdemu wynikowi prawdopodobieństwo, z jakim doświadczenie δ może zakończyć się tym wynikiem.

Przestrzeń probabilistyczna, którą wyżej określiliśmy dla losowania kuli z urny U, jest modelem probabilistycznym tego doświadczenia losowego. Rozwiązywanie problemu strategii w grze typu TOTO LOTKA sprowadza się zatem do konstrukcji modelu probabilistycznego pewnego doświadczenia losowego.

Przestrzeń probabilistyczna (Ω_5, p_5), gdzie $\Omega_5 = \{\mathsf{b}, \mathsf{c}\}$, $p_5(\mathsf{b}) = \frac{2}{3}$ i $p_5(\mathsf{c}) = \frac{1}{3}$ (prezentuje ją rysunek 126*b*) jest modelem losowania kuli z urny U_{2*1}, w której jest jedna kula czerwona i dwie białe. Są dwa możliwe wyniki tego losowania:

b: `wylosowana kula będzie biała`, c: `wylosowana kula będzie czerwona`,

a zatem Ω_5 jest zbiorem wyników losowania, a funkcja p_5 przypisuje każdemu wynikowi prawdopodobieństwo, z jakim losowanie może się zakończyć tym wynikiem.

■ Doświadczeniem losowym jest rzut monetą. Są dwa możliwe wyniki:

o – `wypadnie orzeł`, r – `wypadnie reszka`.

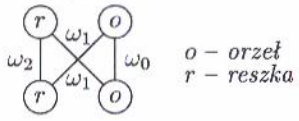
Oba te wyniki są *jednakowo prawdopodobne*. Mówimy wszak o rzucie symetryczną monetą (w matematyce mówi się tylko o takiej monecie!). Prawdopodobieństwo każdego wyniku jest równe $\frac{1}{2}$. Modelem probabilistycznym rzutu monetą jest klasyczna przestrzeń probabilistyczna (Ω, p), gdzie $\Omega = \{o, r\}$ i $p(o) = p(r) = \frac{1}{2}$.

9.9. Rzut dwiema jednakowymi monetami jest doświadczeniem losowym o trzech możliwych wynikach:

ω_0: `na obu monetach wypadnie orzeł`,
ω_1: `na jednej monecie wypadnie orzeł, na jednej reszka`,
ω_2: `na obu monetach wypadnie reszka`.

Znajdź prawdopodobieństwo każdego z tych wyników.

□ Wyniki rzutu dwiema monetami tworzą zbiór $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2\}$. Każdy odcinek na rysunku 127 reprezentuje jeden możliwy przypadek.



Rys. 127 Jednakowo możliwe przypadki i wyniki rzutu dwiema monetami

Są 4 przypadki i każdy jest jednakowo możliwy. Można je rozważać jedynie w teorii (w praktyce monety nie są rozróżnialne). Jeden z tych przypadków prowadzi do wyniku ω_0. Szanse tego wyniku są jak 1 na 4. I takie same są szanse wyniku ω_2. Do wyniku ω_1 prowadzą 2 przypadki. Szanse tego wyniku są jak 2 na 4. Jeśli p jest funkcją, która każdemu wynikowi rzutu dwiema monetami przypisuje jego prawdopodobieństwo, to:

$$p(\omega_0) = \tfrac{1}{4} \text{ i } p(\omega_1) = \tfrac{1}{2} \text{ oraz } p(\omega_2) = \tfrac{1}{4}.$$

Funkcja p jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze Ω. Para (Ω, p) jest przestrzenią probabilistyczną. Jest ona modelem rzutu dwiema monetami.

1	2	3	4	5

Rys. 128 Kupon do gry losowej *Mini Lotek*

■ Rozważmy następującą wersją TOTO LOTKA, którą nazywajmy MINI LOTKIEM. W grze losuje się dwie liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (a nie – jak w TOTO LOTKU – 6 liczb z 49). Dwie wylosowane liczby są numerami dwóch kul wylosowanych z urny $U_{1\to 5}$. Dwie kule losuje się w niedzielę. W sobotę grający skreślają na kuponie z rysunku 128 dwie liczby oraz składają (i opłacają) wypełnione kupony w kioskach. Skreśliwszy na kuponie dwie liczby w sobotę gracz stawia na wynik niedzielnego losowania. Jeśli wylosowane w niedzielę dwie liczby okażą się tymi, które gracz skreślił w sobotę, to w poniedziałek dostaje on nagrodę. Zauważ, jak ważny jest w tych rozważaniach czas.



Rys. 129 Procedury w TOTO LOTKU a czas w rachunku prawdopodobieństwa

Rodzi się tu pytanie:

Czy jest taki wynik losowania, na który warto w Mini Lotku postawić?

9.3. Metoda jednakowo możliwych przypadków

9.10. Z urny U_{b*c}, w której jest b białych i c kul czerwonych ($b \geqslant 2$ i $c \geqslant 2$) będą losowane równocześnie dwie kule. Są trzy możliwe wyniki takiego doświadczenia losowego:

ω_0: `obie wylosowane kule będą białe`,

ω_1: `jedna z wylosowanych kul będzie biała i jedna czerwona`,

ω_2: `obie wylosowane kule będą czerwone`.

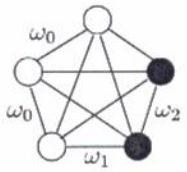
Znajdź prawdopodobieństwo każdego z tych wyników.

Rozwiążemy najpierw zadanie w przypadku, gdy $b = 3$ i $c = 2$.

9.11. Z urny U_{3*2} o 3 kulach białych i dwu czerwonych będą losowane równocześnie dwie kule. Określ model probabilistyczny tego doświadczenia losowego.

Są trzy możliwe wyniki losowania dwu kul: $\omega_0, \omega_1, \omega_2$. Dla każdego wyniku losowania dwu kul trzeba określić szanse, czyli prawdopodobieństwo, że właśnie nim zakończy się losowanie. Białych kul jest więcej niż czerwonych, a więc wynik ω_0 jest bardziej prawdopodobny niż wynik ω_2. Wyniki nie są jednakowo prawdopodobne.

Kule tego samego koloru nie są rozróżnialne. Rozmieśćmy na chwilę wszystkie kule z urny w wierzchołkach pięciokąta. Jest to tylko analiza teoretyczna. W ten sposób wszystkie kule stały się rozróżnialne między sobą. Losując dwie kule możemy (ale tylko w teorii) rozstrzygać które dwie kule zostały wylosowane, a nie tylko jakiego koloru. W tej teoretycznej sytuacji dwie wylosowane kule tworzą dwuelementową kombinację zbioru pięciu różnych kul.



Rys. 130 Jednakowo możliwe przypadki i wyniki losowania dwu kul z urny U_{3*2}

Na rysunku 130 każdą taką kombinację przedstawia odcinek łączący dwa wierzchołki pięciokąta. Te kombinacje są jednakowo możliwymi przypadkami. Jest ich 10. Z tych 10 jednakowo możliwych przypadków 3 prowadzą do wyniku ω_0 (reprezentują je odcinki łączące białe kule), a zatem $p(\omega_0) = \frac{3}{10}$. Przypadków prowadzących do wyniku ω_1 jest 6, a więc $p(\omega_1) = \frac{6}{10}$. Tylko jeden przypadek daje wynik ω_2, a zatem $p(\omega_2) = \frac{1}{10}$. Tak określona funkcja p przypisuje każdemu wynikowi jego prawdopodobieństwo. Funkcja p jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2\}$, a więc para (Ω, p) jest przestrzenią probabilistyczną. Metoda, którą znaleźliśmy tę przestrzeń, nosi nazwę *metody jednakowo możliwych przypadków*.

Podobną metodą zostały określone przestrzenie probabilistyczne przy rozwiązywaniu zadania 9.8 (w tym przypadku każda z kul w urnie jest jednakowo możliwym przypadkiem, każda z kul w urnie U ma bowiem w losowaniu jednakowe szanse) oraz zadania 9.9 (jednakowo możliwe przypadki przedstawiono na rys. 127 jako odcinki).

Na s. 141 odkryliśmy prosty wzór na liczbę dwuelementowych kombinacji zbioru s-elementowego jako wzór na liczbę odcinków łączących wierzchołki s-kąta wypukłego:

$$\binom{s}{2} = \frac{s(s-1)}{2}.$$

Wykorzystując ten wzór sprawdź, że rozwiązanie zadania 9.10 jest następujące:

$$p(\omega_0) = \frac{b(b-1)}{(b+c)(b+c-1)},\quad p(\omega_1) = \frac{2bc}{(b+c)(b+c-1)},\quad p(\omega_2) = \frac{c(c-1)}{(b+c)(b+c-1)}.$$

Wśród doświadczeń losowych wyróżniają się te, których wszystkie możliwe wyniki są jednakowo prawdopodobne (np. rzut monetą). Modele probabilistyczne takich doświadczeń są klasycznymi przestrzeniami probabilistycznymi. Mówimy, że są to *doświadczenia losowe o modelu klasycznym.*

■ Wyniki rzutu kostką tworzą zbiór $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Z symetrii wynika, że

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \tfrac{1}{6}.$$

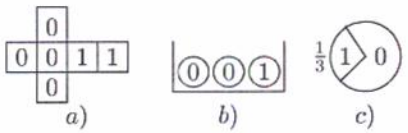
Mówimy tu o rzucie symetryczną kostką. Model probabilistyczny tego doświadczenia losowego jest klasyczną przestrzenią probabilistyczną (bo wszystkie wyniki rzutu są jednakowo prawdopodobne).

■ W urnie U_{b*1} jest b kul białych ($b \geqslant 2$) i jedna czerwona. Losowanie równocześnie dwu kul z tej urny jest doświadczeniem losowym o dwu możliwych wynikach:

ω_0 : `obie wylosowane kule będą białe`,

ω_1 : `jedna będzie biała i jedna czerwona`.

Jeżeli $b = 3$, to oba wyniki są jednakowo prawdopodobne (losowanie jest doświadczeniem o klasycznym modelu probabilistycznym). W przypadku $b = 2$ wyniki nie są jednakowo prawdopodobne (model losowania nie jest klasyczny).



a) *b)* *c)*

Rys. 131 Kostka, urna i ruletka do losowania liczby ze zbioru {0,1}

■ Rysunek 131 przedstawia trzy przyrządy do losowania liczby: kostkę, urnę i ruletkę. Rozważmy trzy doświadczenia losowe:

δ_K: rzut kostką, której siatkę przedstawia rysunek 131*a* — wylosowana liczba to ta, która znajdzie się na górnej ściance po upadku kostki,

δ_U: losowanie kuli z urny, której skład przedstawia rysunek 131*b* — wylosowana liczba jest liczbą na kuli wylosowanej z tej urny,

δ_R: losowanie sektora za pomocą ruletki, której tarczę prezentuje rysunek 131*c* — wokół tarczy kręci się strzałka a wylosowaną liczbą jest numer sektora, na którym strzałka się zatrzyma.

Przestrzeń probabilistyczna (Ω, p), gdzie $\Omega = \{0,1\}$ i $p(0) = \frac{2}{3}$ i $p(1) = \frac{1}{3}$, jest modelem każdego z tych doświadczeń.

Każdy problem z rachunku prawdopodobieństwa rozwiązuje się w pewnej przestrzeni probabilistycznej. Rozwiązywanie każdego zadania z rachunku prawdopodobieństwa rozpoczyna się od konstrukcji takiej przestrzeni. Jest ona na ogół modelem probabilistycznym doświadczenia losowego, o którym w zadaniu mowa.

9.4. Drzewo stochastyczne

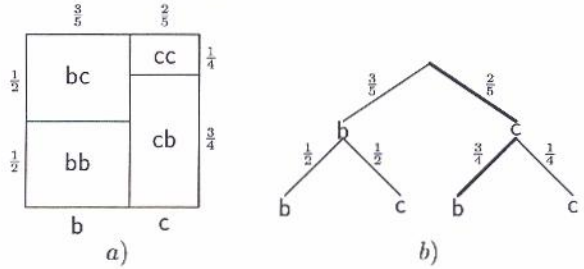
Wynik doświadczenia losowego przebiegającego etapami przedstawiamy jako ciąg wyników kolejnych etapów.

■ Z urny U_{3*2} o trzech kulach białych i dwu czerwonych będzie losowana kula 2 razy bez zwracania. Są 4 możliwe wyniki tego doświadczenia losowego przebiegającego etapami:

bb: `biała za pierwszym i biała za drugim razem`,
bc: `biała za pierwszym razem i czerwona za drugim`,
cb: `czerwona za pierwszym razem i biała za drugim`,
cc: `czerwona za pierwszym i czerwona za drugim razem`.

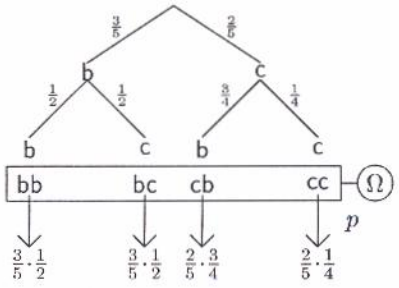
Prawdopodobieństwa wszystkich wyników dają w sumie 1. Prześledźmy, jak etapami rozkłada się to jednostkowe prawdopodobieństwo pomiędzy poszczególne wyniki.

Na rysunku 132*a* wynik dwukrotnego losowania jest oczkiem prostokątnej sieci narzuconej na kwadrat o polu 1, prawdopodobieństwo wyniku jest polem tego oczka.



Rys. 132 Przestrzeń probabilistyczna jako model dwukrotnego losowania bez zwracania kuli z urny U_{3*2} w interpretacji geometrycznej (*a*) i drzewo stochastyczne tego losowania (*b*)

Graf z rysunku 132*b* nazywa się *drzewem stochastycznym*. Każdy wynik odpowiada na tym drzewie pewnej *gałęzi*. Na rysunku 132*b* pogrubiono gałąź, której odpowiada wynik cb. Każdemu oczku z rysunku 132*a* odpowiada na drzewie z rysunku 132*b* gałąź. Rysunek 132 sugeruje, by każdemu wynikowi przyporządkować iloczyn liczb przypisanych kolejnym odcinkom gałęzi, której ten wynik odpowiada (ten iloczyn jest polem oczka). Zgodnie z tą *regułą mnożenia* wynikowi cb zostaje przypisany iloczyn $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$. Rysunek 133 jest protokołem z konstrukcji za pomocą drzewa stochastycznego przestrzeni probabilistycznej dla dwukrotnego losowania bez zwracania kuli z urny U_{3*2}.



Rys. 133 Drzewo stochastyczne i przestrzeń probabilistyczna

9.12. Sprawdź, że określona wspomnianą regułą mnożenia funkcja jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze $\Omega = \{\mathsf{bb}, \mathsf{bc}, \mathsf{cb}, \mathsf{cc}\}$.

9.13. Określ model probabilistyczny dwukrotnego losowania bez zwracania kuli z urny, w której jest jedna kula biała i dwie czerwone.

9.14. Doświadczenie δ jest dwukrotnym losowaniem ze zwracaniem kuli z urny U_{3*2} o trzech kulach białych i dwu czerwonych. Za pomocą drzewa stochastycznego skonstruuj przestrzeń probabilistyczną dla tego doświadczenia losowego.

Drzewo stochastyczne służy:
— do konstrukcji zbioru Ω wyników doświadczenia losowego przebiegającego etapami,
— do określenia rozkładu prawdopodobieństwa na tym zbiorze (funkcja p określona regułą mnożenia dla drzew jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze Ω — to można udowodnić).
Drzewo stochastyczne dostarcza prostych reguł konstruowania przestrzeni probabilistycznej (Ω, p) w przypadku doświadczenia losowego δ przebiegającego etapami.

9.15. Za pomocą drzewa stochastycznego określ przestrzeń probabilistyczną dla:
a) trzykrotnego rzutu monetą,
b) n-krotnego rzutu monetą.
Czy w obu przypadkach uznałbyś ją za model tego doświadczenia losowego?

□ Każda gałąź drzewa trzykrotnego (n-krotnego) rzutu monetą składa się z trzech (n) odcinków i każdemu odpowiada liczba $\frac{1}{2}$. Każdej gałęzi odpowiada zatem ten sam iloczyn $(\frac{1}{2})^3$ (analogicznie $(\frac{1}{2})^n$). Pewne symetrie (na każdym etapie orzeł i reszka są jednakowo prawdopodobne) dają podstawy, aby każdy wynik uważać za jednakowo prawdopodobny. Klasyczną przestrzeń probabilistyczną, określoną za pomocą drzewa, możemy więc traktować jako model trzykrotnego (n-krotnego) rzutu monetą.

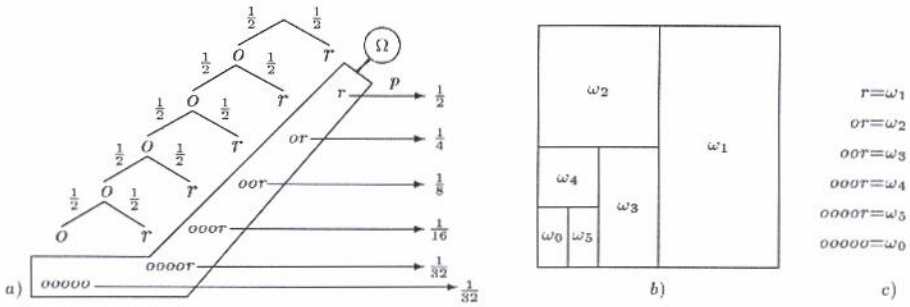
Uwaga 1: Czasami można określać przestrzeń probabilistyczną za pomocą drzewa stochastycznego bez jego rysowania. Z pewnych symetrii drzewa (równe „długości" wszystkich gałęzi, jednakowe liczby odpowiadające poszczególnym odcinkom gałęzi itd.) wynika, że jest to klasyczna przestrzeń probabilistyczna.

Uwaga 2: Reguła mnożenia przypisuje każdemu wynikowi ω doświadczenia δ pewien iloczyn liczb dodatnich. Każda z tych liczb jest prawdopodobieństwem pewnego wyniku pojedynczego etapu doświadczenia δ. Ale iloczynu tych prawdopodobieństw nie możemy nazywać prawdopodobieństwem wyniku ω. Zauważ, że prawdopodobieństwem wyniku mieliśmy prawo nazywać iloraz liczby przypadków prowadzących do tego wyniku i liczby wszystkich jednakowo możliwych przypadków. Taki iloraz pojawił się przy konstruowaniu przestrzeni probabilistycznej metodą klasyfikacji jednakowo możliwych przypadków.

Uwaga: drzewo stochastyczne pozwala jedynie konstruować przestrzeń probabilistyczną dla doświadczenia losowego przebiegającego etapami, nie pozwala jednak rozstrzygać, że jest ona modelem tego doświadczenia.

9.16. Rzut monetą będzie powtarzany tak długo, aż wypadnie reszka, ale jeśli w żadnym z pięciu rzutów reszka nie wypadnie, to doświadczenie się kończy. Za pomocą drzewa

stochastycznego określ przestrzeń probabilistyczną tego doświadczenia losowego δ. Czy uznałbyś tę przestrzeń za model probabilistyczny doświadczenia δ?



Rys. 134 Nie trwające „dłużej" niż 5 rzutów monetą czekanie na reszkę – drzewo stochastyczne i probabilistyczny model

Doświadczenie przebiega etapami. Konstrukcję przestrzeni probabilistycznej dla tego doświadczenia przedstawia rysunek 134*a* a przestrzeń rysunek 134*b* i tabela:

p:

ω	r	or	oor	$ooor$	$oooor$	$ooooo$
$p(\omega)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$

Prawdopodobieństwa poszczególnych wyników można łatwo określić korzystając z faktu, że wszystkie wyniki k-krotnego rzutu monetą są jednakowo prawdopodobne i jest ich 2^k. Weźmy np. wynik *oor*. Jest to jeden z ośmiu jednakowo prawdopodobnych wyników trzykrotnego rzutu monetą, a więc prawdopodobieństwo wyniku *oor* jest równe $\frac{1}{8}$. Tę samą liczbę $\frac{1}{8}$ dostaniemy określając $p(oor)$ za pomocą reguły mnożenia. Wyniki doświadczenia nie są jednakowo prawdopodobne.

W ostatnim zadaniu liczba etapów doświadczenia losowego zależy od przypadku. Jest to *doświadczenie losowe o losowej liczbie etapów.*

9.17. Z urny U_{5*1}, w której jest pięć kul białych i jedna czerwona, będzie losowana bez zwracania kula tak długo, aż zostanie wylosowana kula czerwona.
a) Za pomocą drzewa stochastycznego określ przestrzeń probabilistyczną dla tego doświadczenia o losowej liczbie etapów.
b) Czy uznałbyś tę przestrzeń za model probabilistyczny opisanego doświadczenia? Wskaż argumenty, które za tym przemawiają.

9.18. Z grona sześciu osób trzeba wylosować jedną, ale tak, aby w tym losowaniu każda z osób miała równe szanse. Postanowiono to zrobić za pomocą zapałek. Tę metodę losowania opisano na s. 130. Czy każda z osób ma w tym losowaniu jednakowe szanse? Jak uzasadnisz odpowiedź? Co ma do tego rozwiązanie zadania 9.17?

9.19. Mamy sześć wyników rzutu kostką. Prawdopodobieństwo każdego jest równe $\frac{1}{6}$. Zginęła Ci kostka. Jak za pomocą tej urny U_{5*1} symulować rzut kostką? Co ma z tym pytaniem wspólnego zadanie 9.17?

9.20. Po potasowaniu dwu kart pikowych i dwu kierowych, zostaną wyłożone w rzędzie: a) dwie karty, b) trzy karty. Kolejność jest tu istotna. Interesujmy się tylko kolorem karty (czerwony – czarny). Określ model probabilistyczny każdego z tych doświadczeń losowych.

9.5. Zdarzenie w przestrzeni probabilistycznej

9.21. Bartek zaprasza Artka do gry. W grze będą losowane równocześnie dwie kule z urny U_{3*2} o trzech kulach białych i dwu czerwonych. Jest to doświadczenie losowe δ. Jeśli obie wylosowane kule będą tego samego koloru, to zwycięży Artek, jeśli każda z wylosowanych kul będzie innego koloru, to zwycięży Bartek. Jaką decyzję powinien podjąć Artek w takiej sytuacji? Czy jest to gra sprawiedliwa? Jak tę sprawiedliwość należy rozumieć?

W zadaniu opisana jest pewna gra losowa. Uznamy ją za sprawiedliwą, jeśli szanse obu graczy na zwycięstwo są równe. Jak te szanse wymierzać?

Model probabilistyczny doświadczenia δ określiliśmy rozwiązując zadanie 9.11 (s. 155). Jest on przestrzenią probabilistyczną (Ω, p) określoną następująco:

$\omega \in \Omega$	ω_0	ω_1	ω_2
$p(\omega)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

.

W regulaminie gry mowa jest o dwu zdarzeniach związanych z doświadczeniem δ:

$A = \{$*obie wylosowane kule będą tego samego koloru*$\}$,

$B = \{$*każda z wylosowanych kul będzie innego koloru*$\}$.

Grę uznamy za sprawiedliwą, jeśli te zdarzenia A i B są jednakowo prawdopodobne. Rodzą się tu pytania:

— Czym są te zdarzenia A i B w przestrzeni probabilistycznej (Ω, p), która jest modelem losowania?

— Jak w tej przestrzeni probabilistycznej określić ich prawdopodobieństwa?

Zdarzenie B zajdzie wtedy i tylko wtedy, gdy doświadczenie zakończy się wynikiem ω_1. Mówimy, że wynik ω_1 *sprzyja* zdarzeniu B. Zdarzenie A zajdzie, gdy doświadczenie zakończy się albo wynikiem ω_0, albo wynikiem ω_2. Wyniki sprzyjające zdarzeniu A tworzą zbiór $\{\omega_0, \omega_2\}$. Opisane słowami zdarzenie utożsamiajmy odtąd ze zbiorem sprzyjających mu wyników. Mamy więc $A = \{\omega_0, \omega_2\}$ i $B = \{\omega_1\}$.

Niech δ będzie dowolnym doświadczeniem losowym. Załóżmy, że jego modelem jest przestrzeń probabilistyczna (Ω, p). Każde opisane słowami zdarzenie związane z doświadczeniem δ będziemy utożsamiać ze zbiorem sprzyjających mu wyników, a więc z pewnym podzbiorem zbioru Ω. Każdy podzbiór zbioru Ω jest, przy powyższej umowie, zdarzeniem związanym z doświadczeniem δ.

9.22. Podzbiorem zbioru wyników doświadczenia, o którym mowa w zadaniu 9.21, jest zbiór $\{\omega_1, \omega_2\}$. Określ słownym opisem zdarzenie, które można utożsamiać z tym zbiorem. Określ takim słownym opisem podzbiór $\{\omega_0, \omega_1\}$.

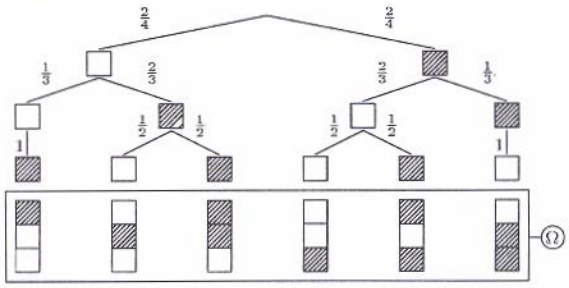
Definicja 9-4 [ZDARZENIE] Jeśli (Ω, p) jest przestrzenią probabilistyczną, to każdy podzbiór zbioru Ω nazywamy *zdarzeniem w tej przestrzeni*. Zbiór $\mathcal{Z} = 2^{\Omega}$, tj. zbiór wszystkich podzbiorów zbioru Ω, nazywamy *rodziną zdarzeń pokrewnych*. Jeśli (Ω, p) jest modelem probabilistycznym doświadczenia losowego δ, to $\mathcal{Z}$ nazywamy *rodziną zdarzeń związanych z doświadczeniem* δ.

Niech przestrzeń probabilistyczna (Ω, p) będzie modelem doświadczenia losowego δ. Do rodziny $\mathcal{Z}$ należą dwa szczególne zbiory: $\emptyset$ i Ω. Pierwszy z nich przedstawia

zdarzenie, któremu nie sprzyja żaden wynik doświadczenia. Zajście takiego zdarzenia nie jest możliwe. Nazywamy je *zdarzeniem niemożliwym*. Zbiór Ω przedstawia zdarzenie, któremu sprzyja każdy wynik doświadczenia δ. Zajście takiego zdarzenia jest pewne, nazywamy je zatem *zdarzeniem pewnym*. Jednoelementowe podzbiory zbioru wyników nazywamy *zdarzeniami prostymi*[11]. Zdarzenie, które nie jest pewne i które nie jest niemożliwe, nazywamy *zdarzeniem losowym*, albo *zdarzeniem prawdopodobnym*.

■ Z pojemnika, w którym są cztery identyczne w dotyku sześciany, dwa białe i dwa czerwone, będzie losowany sześcian trzy razy bez zwracania. Z kolejno wylosowanego sześcianu powstanie parter, pierwsze i drugie piętro wieży. Ta wieża jest wynikiem doświadczenia losowego δ_w. Związmy z tym doświadczeniem zdarzenia:
$A = \{$*wieża, jaka powstanie, będzie jednokolorowa*$\}$,
$B = \{$*wieża, jaka powstanie, będzie różnokolorowa*$\}$,
$C = \{$*parter powstałej wieży będzie czerwony*$\}$,
$D = \{$*parter powstałej wieży będzie biały*$\}$,
$E = \{$*powstała wieża będzie mieć więcej czerwonych „kondygnacji" niż białych*$\}$,
$F = \{$*w powstałej wieży będzie więcej „kondygnacji" białych niż czerwonych*$\}$.
Zdarzenie A jest niemożliwe, zdarzenie B jest pewne. Pozostałe zdarzenia są prawdopodobne. Zdarzenia C i D są przeciwne. Czy są przeciwne zdarzenia E i F?

Rysunek 135 przedstawia drzewo stochastyczne doświadczenia losowego δ_w oraz zbiór Ω jego wyników.



Rys. 135 Drzewo i wieże jako wyniki trzykrotnego losowania sześcianu ze zbioru czterech sześcianów, dwu białych i dwu czerwonych

Wieże, jako wyniki doświadczenia δ_w, można kodować za pomocą trzywyrazowych wariacji zbioru $\{$b, c$\}$, gdzie b oznacza biały sześcian, c zaś sześcian czerwony, pierwszy wyraz oznacza kolor parteru, drugi – kolor pierwszego piętra a trzeci – kolor piętra drugiego. W tej sytuacji zbiór wyników doświadczenia δ_w ma postać

$$\Omega = \{\mathsf{bbc}, \mathsf{bcb}, \mathsf{bcc}, \mathsf{cbb}, \mathsf{cbc}, \mathsf{ccb}\}.$$

9.23. Określone słownym opisem zdarzenia A, B, C, D, E i F, związane z doświadczeniem losowym δ_w przedstaw jako podzbiory zbioru Ω.

Rodziną wszystkich zdarzeń związanych z losowaniem dwu kul z urny U_{3*2} jest zbiór $\mathcal{Z} = \{\emptyset, \{\omega_0\}, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_0, \omega_1\}, \{\omega_0, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_0, \omega_1, \omega_2\}\}$.

[11] Takie zdarzenia należałoby nazywać *zdarzeniami elementarnymi*. W ujęciach akademickich rachunku prawdopodobieństwa *zdarzeniami elementarnymi* nazwano elementy zbioru Ω. Zgodnie z taką terminologią „zdarzenie elementarne" nie jest „zdarzeniem".

Zdarzenie jest zbiorem. W przypadku zdarzeń pokrewnych możemy więc mówić o *sumie zdarzeń*, o *iloczynie zdarzeń*, o *zdarzeniach rozłącznych*.

■ Zdarzenia A i B z zadania 9.21 są rozłączne, $A \cap B = \emptyset$. Jest $A \cup B = \Omega$, a więc suma zdarzeń A i B jest zdarzeniem pewnym. Każdy wynik losowania sprzyja albo zdarzeniu A, albo zdarzeniu B. Zdarzeniu A sprzyjają te i tylko te wyniki losowania, które nie sprzyjają zdarzeniu B. Jest tu $A = \Omega \setminus B$. Zapiszemy to inaczej: $A = B'$. Zdarzenie A — to *zdarzenie przeciwne do* B. Ale również zdarzenie B jest przeciwne do A, bo z faktu, że $A = \Omega \setminus B$ wynika, że $B = \Omega \setminus A$. O zdarzeniach A i B możemy więc mówić krótko, że są to *zdarzenia przeciwne*.

Definicja 9-5 [ZDARZENIA PRZECIWNE] Dwa zdarzenia pokrewne A i B, które są rozłączne ($A \cap B = \emptyset$) i których suma jest zdarzeniem pewnym ($A \cup B = \Omega$), nazywamy *zdarzeniami przeciwnymi*.

■ Zdarzenia A i B z zadania 9.21 są zdarzeniami przeciwnymi. Zdarzenie B jest zdarzeniem prostym.

9.24. Po potasowaniu trzech kart pikowych: waleta, damy i króla, karty zostaną rozłożone w rzędzie na trzech kolejnych miejscach oznaczonych literami J,Q,K. Właściwe miejsce dla waleta, to miejsce z literą J, właściwe dla damy — to miejsce z literą Q, zaś dla króla — miejsce z literą K. W modelu probabilistycznym tego doświadczenia losowego przedstaw zdarzenia:

$A_j = \{$*dokładnie j kart trafi na właściwe miejsce*$\}$, $j = 0, 1, 2, 3$,
$A = \{$*co najmniej jedna karta trafi na właściwe miejsce*$\}$.

Każdy wynik doświadczenia jest permutacją zbioru $\{J,Q,K\}$. Jest tu więc

$$\Omega = \{JQK, JKQ, QJK, QKJ, KJQ, KQJ\} \quad \text{i} \quad p(\omega) = \tfrac{1}{6} \quad \text{dla} \quad \omega \in \Omega.$$

W tej przestrzeni probabilistycznej (Ω, p) mamy:

$$A_0 = \{QKJ,KJQ\},\ A_1 = \{JKQ,QJK,KQJ\},\ A_2 = \emptyset \text{ i } A_3 = \{JQK\},$$

a więc A_2 jest zdarzeniem niemożliwym, A_3 jest zdarzeniem prostym. Zauważ, że
$A_0 \cap A_1 = \emptyset$ (zdarzenia A_0 i A_1 to są zdarzenia rozłączne),
$A = A_1 \cup A_3$ (zdarzenie A jest sumą zdarzeń A_1 i A_3), a zatem
zdarzenia A_0 i A to są zdarzenia przeciwne.

Zdarzenia A_0, A_1 i A_3 są *parami rozłączne*, bo

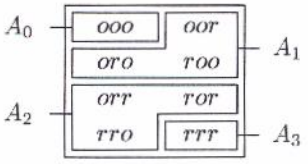
$$A_0 \cap A_1 = \emptyset \quad \text{i} \quad A_1 \cap A_3 = \emptyset \quad \text{i} \quad A_0 \cap A_3 = \emptyset.$$

Z kolei $A_0 \cup A_1 \cup A_3 = \Omega$, a więc suma zdarzeń A_0, A_1 i A_3 jest zdarzeniem pewnym.

Definicja 9-6 [UKŁAD ZUPEŁNY ZDARZEŃ] Zbiór zdarzeń pokrewnych, które są parami rozłączne i których suma jest zdarzeniem pewnym, nazywamy *układem zupełnym zdarzeń*.

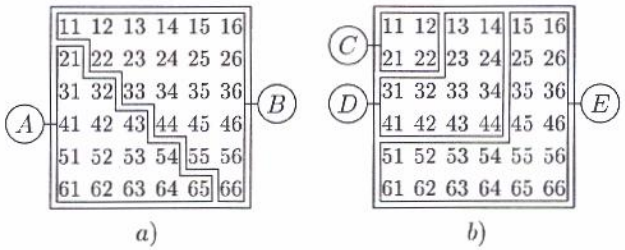
■ Zdarzenia A_0, A_1 i A_3, o których mowa w zad. 9.24, tworzą układ zupełny zdarzeń. Układ zupełny tworzą także zdarzenia przeciwne A i A_0. Zdarzenia A i B, o których mowa w zadaniu 9.21, także tworzą układ zupełny zdarzeń.

■ Z trzykrotnym rzutem monetą związmy zdarzenia:
$A_j = \{$*wypadnie dokładnie j reszek*$\}$ dla $j = 0, 1, 2, 3$.
Zdarzenia A_0, A_1, A_2 i A_3 tworzą układ zupełny zdarzeń (por. rysunek 136).



Rys. 136 Układ zupełny zdarzeń związanych z trzykrotnym rzutem monetą

Wynik dwukrotnego rzutu kostką kodujemy parą (x, y), gdzie x jest liczbą oczek wyrzuconych w pierwszym rzucie a y w drugim rzucie. Parę (x, y) zapisujmy jako liczbę $10x+y$. Wynik $(2, 5)$ (`2 oczka w pierwszym i 5 w drugim rzucie`) jest więc liczbą 25. Zbiór Ω wyników dwukrotnego rzutu kostką prezentuje rysunek 137.



Rys. 137 Dwa układy zupełne zdarzeń związanych z dwuktotnym rzutem kostką

9.25. Na rysunku 137 przedstawiono dwa układy zupełne zdarzeń związanych z dwukrotnym rzutem kostką. Są to zbiory $\{A, B\}$ i $\{C, D, E\}$. Opisz słownie każde z tych zdarzeń.

Zbiory A i C są zdarzeniami, które słownie można opisać następująco:
$A = \{w$ *pierwszym rzucie wypadnie więcej oczek niż w drugim*$\}$,
$C = \{w$ *każdym rzucie wypadnie nie więcej niż 2 oczka*$\}$.
Zdarzenia A i B są przeciwne.

9.26. Z dwukrotnym rzutem kostką związmy następujące zdarzenia:
$A = \{w$ *każdym rzucie wypadnie parzysta liczba oczek*$\}$,
$B = \{w$ *każdym rzucie wypadnie nieparzysta liczba oczek*$\}$,
$C = \{w$ *jednym rzucie wypadnie parzysta, w jednym nieparzysta liczba oczek*$\}$,
$D = \{$*liczba łącznie wyrzuconych oczek będzie nieparzysta*$\}$,
$E = \{$*liczba łącznie wyrzuconych oczek będzie parzysta*$\}$,
$F = \{w$ *obu rzutach wypadną jednakowe liczby oczek*$\}$,
$G_j = \{$*łącznie wypadnie* j *oczek*$\}$, gdzie $j = 2, 3, 4, \ldots, 12$,
$H = \{$*liczba łącznie wyrzuconych oczek będzie podzielna przez 13*$\}$,
$J = \{$*liczba oczek wyrzuconych łącznie w obu rzutach będzie podzielna przez 3*$\}$,
$K = \{$*liczba oczek wyrzuconych łącznie w obu rzutach będzie podzielna przez 6*$\}$,
$M = \{$*na każdej z kostek wypadnie co najmniej 5 oczek*$\}$,
Przedstaw te zdarzenia jako podzbiory zbioru Ω wyników dwukrotnego rzutu kostką. Wskaż wśród nich zdarzenia przeciwne. Czy są takimi zdarzenia B i E? Wskaż zbiory zdarzeń, które są układami zupełnymi zdarzeń. Czy prawdą jest że $E = A \cup B$ i $D = C$?

9.27. Z sześciokrotnym rzutem kostką wiążą się między innymi zdarzenia:

$A = \{$*w każdym rzucie wypadnie inna liczba oczek*$\}$,
$B = \{$*któraś z liczb oczek nie wypadnie na żadnej z kostek*$\}$,
$C = \{$*w każdym rzucie wypadnie ta sama liczba oczek*$\}$,
$D = \{$*liczba łącznie wyrzuconych oczek będzie mniejsza niż 6*$\}$,
$E = \{$*liczba łącznie wyrzuconych oczek będzie większa niż 5*$\}$.
Dla każdego ze zdarzeń rozstrzygnij, czy jest ono pewne, niemożliwe czy prawdopodobne. Czy są wród nich zdarzenia przeciwne? Ile wyników sześciokrotnego rzutu kostką sprzyja zdarzeniu A, ile zdarzeniu B a ile zdarzeniu C?

Wynik sześciokrotnego rzutu kostką jest sześciowyrazowym ciągiem, którego j-ty wyraz jest liczbą oczek wyrzuconych za j-tym razem ($j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

9.6. Prawdopodobieństwo zdarzenia

Załóżmy, że para (Ω, p) jest przestrzenią probabilistyczną i $\mathcal{Z}=2^{\Omega}$. Dla każdego zdarzenia z rodziny $\mathcal{Z}$ chcemy określić jego prawdopodobieństwo. Oznaczajmy prawdopodobieństwo zdarzenia A przez $P(A)$. W praktyce, gdy przestrzeń probabilistyczna (Ω, p) jest modelem doświadczenia losowego, z którym związane jest zdarzenie A, liczbę $P(A)$ chcemy rozumieć jako miarę szansy zajścia zdarzenia A.

■ Koncepcję definicji prawdopodobieństwa zdarzenia podsunie nam zadanie 9.21.

— Zdarzeniu B sprzyja tylko wynik ω_1. Prawdopodobieństwo tego wyniku powinno być zarazem prawdopodobieństwem zdarzenia B, czyli $P(B) = p(\omega_1)$.

— Zdarzeniu A sprzyjają wyniki ω_0 i ω_2. Wydaje się naturalne przyjąć, że prawdopodobieństwo zdarzenia A jest sumą prawdopodobieństw tych wyników, a więc, że $P(A) = p(\omega_0) + p(\omega_2)$.

— Prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego powinno być równe zero.

Definicja 9-7 [PRAWDOPODOBIEŃSTWO ZDARZENIA] Niech A będzie zdarzeniem w przestrzeni probabilistycznej (Ω, p), gdzie $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_s\}$. *Prawdopodobieństwem zdarzenia A w tej przestrzeni* nazywamy liczbę:

$$P(A) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } A = \emptyset, \\ p(\omega), & \text{gdy } A = \{\omega\}, \\ p(\omega_{j_1}) + p(\omega_{j_2}) + \cdots + p(\omega_{j_k}), & \text{gdy } A = \{\omega_{j_1}, \omega_{j_2}, \ldots, \omega_{j_k}\}. \end{cases}$$

Tak określoną (na rodzinie $\mathcal{Z}$ wszystkich podzbiorów zbioru Ω) funkcję P, nazywamy *prawdopodobieństwem w przestrzeni probabilistycznej* (Ω, p).

[PRAWDOPODOBIEŃSTWO A ROZKŁAD PRAWDOPODOBIEŃSTWA] Niech (Ω, p) będzie modelem doświadczenia losowego δ. W myśl tej definicji prawdopodobieństwo zdarzenia, któremu sprzyjają co najmniej dwa wyniki, jest sumą prawdopodobieństw tych wyników. W tym stwierdzeniu mowa jest o wartościach dwu funkcji:
— funkcji P, która zdarzeniom przypisuje ich prawdopodobieństwa oraz
— funkcji p, która wynikom doświadczenia δ przypisuje ich prawdopodobieństwa.
Są to dwie różne funkcje. Funkcję p nazywamy *rozkładem prawdopodobieństwa*, funkcję P nazywamy *prawdopodobieństwem*.

Mając przestrzeń probabilistyczną (Ω, p) utworzyliśmy rodzinę $\mathcal{Z}$ zdarzeń. Na tej rodzinie określiliśmy funkcję P, zwaną *prawdopodobieństwem*. Tym samym, mając parę (Ω, p), skonstruowaliśmy trójkę $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$. W rachunku prawdopodobieństwa *przestrzenią probabilistyczną* nazywa się taką trójkę $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$.

■ Dla zdarzeń A i B z zadania 9.21, związanych z losowaniem dwu kul z urny U_{3*2}, mamy więc:

$$P(B) = p(\omega_1) = \frac{6}{10} \text{ i } P(A) = p(\omega_0) + p(\omega_2) = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10}.$$

Jest $P(A) < P(B)$. Zdarzenie B jest bardziej prawdopodobne niż zdarzenie A. Szanse graczy nie są równe, co oznacza, że opisana w zadaniu 9.21 gra losowa nie jest sprawiedliwa. Bartek ma większe szanse na zwycięstwo niż Artek. Racjonalna decyzja Artka, to odmówić udziału w grze. Są to wnioski, jakie dla praktyki wynikają z wielkości wyliczonego prawdopodobieństwa zdarzeń A i B.

Zauważ, że zdarzeniu A sprzyja więcej wyników niż zdarzeniu B i $P(A) < P(B)$, a więc

> jeśli zdarzeniu A sprzyja więcej wyników niż zdarzeniu B, to z tego **nie wynika**, że zdarzenie A jest bardziej prawdopodobne niż zdarzenie B.

Jeśli A jest dowolnym zbiorem skończonym, to symbolem $\overline{\overline{A}}$ oznaczamy liczbę jego elementów, czyli moc tego zbioru. Ostatni wniosek sformułujemy w języku matematyki następująco:

> Jeśli A i B są zdarzeniami w przestrzeni probabilistycznej (Ω, p) a P jest prawdopodobieństwem w tej przestrzeni, to z faktu, że $\overline{\overline{B}} > \overline{\overline{A}}$ **nie wynika**, że $P(B) > P(A)$.

Na s. 157 wyniki doświadczenia losowego przedstawialiśmy jako oczka sieci narzuconej na kwadrat o polu 1. W tym geometrycznym ujęciu przestrzeni probabilistycznej zdarzenie jest zbiorem pewnych oczek owej sieci. Taki zbiór oczek nazywamy *segmentem*. Prawdopodobieństwo zdarzenia jest polem owego segmentu. Obliczanie prawdopodobieństwa zdarzenia można sprowadzać do obliczania pola pewnej figury.

Twierdzenie 9-1 *Jeżeli (Ω, p) jest przestrzenią probabilistyczną, $\mathcal{Z}$ rodziną zdarzeń a P jest prawdopodobieństwem w tej przestrzeni, to:*

1) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ *dla każdego* $A \in \mathcal{Z}$;

2) $P(\Omega) = 1$ *(prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego jest równe 1);*

3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ *dla każdych A i B z rodziny $\mathcal{Z}$;*

4) *jeżeli* $A \cap B = \emptyset$, *to* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ *(prawdopodobieństwo sumy zdarzeń rozłącznych jest równe sumie prawdopodobieństw tych zdarzeń);*

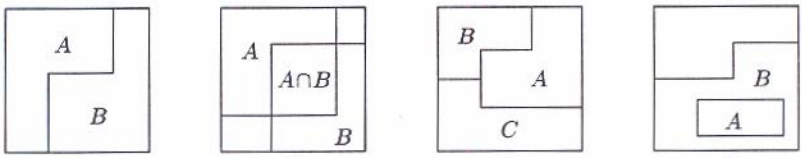
5) *jeżeli B jest zdarzeniem przeciwnym do A, to* $P(B) = 1 - P(A)$, *czyli* $P(A') = 1 - P(A)$;

6) *jeżeli* $A \subset B$, *to* $P(A) \leqslant P(B)$;

7) *jeżeli* $A \subset B$, *to* $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

Idee dowodu tych własności prawdopodobieństwa P może podsuwać rysunek 138. Na tym rysunku przedstawiono:
— dwa zdarzenia przeciwne A i B (rysunek 138*a*),
— zdarzenia A i B oraz ich iloczyn, tj. zdarzenie $A \cap B$ (rysunek 138*b*),
— układ zupełny zdarzeń $\{A, B, C\}$ (rysunek 138*c*),
— zdarzenia A i B, gdzie $A \subset B$ (rysunek 138*d*).

W tym ujęciu zdarzenie jest podzbiorem zbioru Ω, który należy rozumieć jako zbiór prostokątnych oczek sieci narzuconej na kwadrat o polu 1. Tych oczek na rysunku 138 nie zaznaczono. Prawdopodobieństwo zdarzenia jest sumą pól oczek, a więc polem segmentu zaznaczonego na tym rysunku jako zdarzenie. Dzięki temu geometrycznemu ujęcia przestrzeni probabilistycznej i zdarzeń, relacje między prawdopodobieństwami zdarzeń dają się ziterpretować jako relacje między polami pewnych figur zawartych w kwadracie o polu 1.



a) b) c) d)

Rys. 138 Zdarzenia w pewnym ujęciu geometrycznym przestrzeni probabilistycznej

Zdarzenia A i A' są rozłączne, ich suma zaś jest zdarzeniem pewnym. Prawdopodobieństwo P jest funkcją addytywną. Z powyższych faktów wynika więc, że:

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup A') = P(A) + P(A'), \quad \text{czyli} \quad P(A) + P(A') = 1,$$

z czego wynika, że $P(A') = 1 - P(A)$.

9.28. Niech $\Omega = \{a, b, c\}$ i $p(a) = \frac{1}{5}$, $p(b) = 0$ i $p(c) = \frac{4}{5}$. Para (Ω, p) jest przestrzenią probabilistyczną. Na rodzinie $\mathcal{Z}$ wszystkich podzbiorów zbioru Ω (a więc na rodzinie wszystkich zdarzeń w tej przestrzeni) określ prawdopodobieństwo P.

9.29. Niech (Ω, p) będzie przestrzenią probabilistyczną a P prawdopodobieństwem w tej przestrzeni. Czy prawdziwe są implikacje:
1^o *„jeśli $P(A) = 0$, to A jest zdarzeniem niemożliwym"*,
2^o *„jeżeli $P(B) = 1$, to B jest zdarzeniem pewnym"*?
Odpowiedź uzasadnij. Co ma z tym wspólnego rozwiązanie zadania 9.28?

Rozwiązanie zadania 9.28 jest następujące:

$A \in \mathcal{Z}$:	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\emptyset$
$P(A)$:	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{4}{5}$	1	0

.

W przestrzeni probabilistycznej (Ω, p) określonej w tabeli:

1) oprócz zdarzenia niemożliwego (jest nim zbiór $\emptyset$) istnieje inne zdarzenie, którego prawdopodobieństwo jest także równe 0 (jest takim zdarzenie $A = \{b\}$),

2) oprócz zdarzenia pewnego (jest nim zbiór $\{a, b, c\}$) istnieje inne zdarzenie, którego prawdopodobieństwo także jest równe 1 (jest takim zdarzenie $B = \{a, c\}$).

Te przykłady zdarzeń A i B dowodzą, że obie implikacje, o których mowa w zadaniu 9.29, są fałszywe.

9.30. Czy prawdziwa jest implikacja:
„jeżeli A i B są zdarzeniami w przestrzeni probabilistycznej (Ω, p) i P jest prawdopodobieństwem w tej przestrzeni, to $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$"? Odpowiedź uzasadnij.

Przyrządy losujące z rysunku 139 służą do losowania liczby. O tym, jak losuje się liczbę za pomocą kostki, jak za pomocą urny a jak za pomocą ruletki, była mowa na

s. 156. Załóżmy, że każdy z dwóch graczy ma jeden z tych przyrządów losujących. Na znak każdy losuje liczbę, a zwycięża ten, kto wylosuje liczbę większą.



kostka K *urna U* *ruletka R*

Rys. 139 Kostka K, urna U i ruletka R jako przyrządy do losowania liczby

Rozważmy trzy zestawy przyrządów do losowania liczby (rysunek 139):
a) kostka K i urna U — jest to zestaw Z_{K-U},
b) urna U i ruletka R — jest to zestaw Z_{U-R},
b) ruletka R i kostka K — jest to zestaw Z_{R-K}.

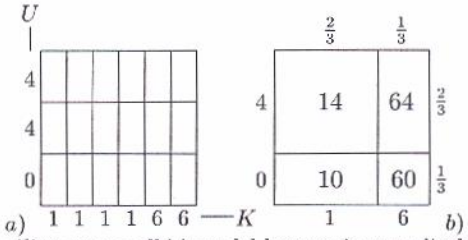
9.31. Z dwu przyrządów losujących danego zestawu możesz sobie wybrać jeden. Drugi przyrząd weźmie Twój przeciwnik. Każdy z was wylosuje liczbę za pomocą swego przyrządu losującego a zwycięży ten, kto wylosuje większą liczbę. Który przyrząd losujący wybierzesz (i dlaczego?), gdy zestawem jest: a) Z_{K-U}, b) Z_{U-R}, c) Z_{R-K}?
Co ma to zadanie wspólnego z rachunkiem prawdopodobieństwa?

□ Załóżmy, że rekwizytem w grze jest zestaw Z_{K-U} i że gracz G będzie rzucał kostką K, gracz H zaś losował kulę z urny U. Rozstrzygnijmy, czy w tym przypadku gra losowa jest sprawiedliwa.

Wynik doświadczenia δ_{K-U}, które przeprowadza się w grze, jest parą (x, y), gdzie x jest liczbą wyrzuconą na kostce, y zaś jest liczbą na kuli wylosowanej z urny U. Zapiszmy tę parę (x, y) jako liczbę $10x + y$. Tę parę możemy utożsamiać z oczkiem sieci z rysunku 140*b*. Prawdopodobieństwo wyniku jest polem tego oczka. Mamy np. $p(14) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$. Modelem probabilistycznym doświadczenia losowego δ_{U-K} jest zatem przestrzeń probabilistyczna (Ω, p), gdzie

$$\Omega = \{10, 14, 60, 64\} \quad \text{oraz} \quad p(10) = \tfrac{2}{9},\ p(14) = \tfrac{4}{9},\ p(60) = \tfrac{1}{9} \ \text{ i } \ p(64) = \tfrac{2}{9}.$$

Ten model doświadczenia δ_{K-U} przedstawia rysunek 140*b*. Przestrzeń probabilistyczna (Ω, p), o której tu mowa, została określona metodą klasyfikacji 18 jednakowo możliwych przypadków, które są na rysunku 140*a* przedstawione jako prostokątne oczka o równych polach.



Rys. 140 Jednakowo możliwe przypadki i model losowania pary liczb (kostką K i urną U)

Rozważmy dwa zdarzenia związane z doświadczeniem losowym δ_{K-U}:
$A = \{$*liczba wylosowana kostką K będzie większa niż na kuli wylosowanej z urny U*$\}$,
$B = \{$*liczba na kuli wylosowanej z urny U będzie większa niż wylosowana kostką K*$\}$.
Zajście zdarzenia A jest równoznaczne ze zwycięstwem gracza G, zajście zdarzenia B – ze zwycięstwem gracza H.

W przestrzeni probabilistycznej, którą prezentuje rys. 140, mamy: $A = \{10, 64, 60\}$, $B = \{14\}$. Z definicji prawdopodobieństwa zdarzenia wynika, że
$P(A) = p(10) + p(64) + p(60) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$, $P(B) = p(14) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$,
a więc $P(A) > P(B)$. Kostka K daje więc graczowi G większe szanse na zwycięstwo niż urna U daje jego przeciwnikowi w grze. W przypadku zestawu Z_{K-U} Twoja racjonalna decyzja, to wybór kostki K, bo kostka K jest *lepsza* od urny U. Zapiszmy ten fakt następująco: $K \gg U$.

Oblicz $P(A)$ i $P(B)$ w przestrzeni probabilistycznej określonej za pomocą drzewa stochastycznego. Porównaj te rozwiązania.

W analogiczny sposób wykażesz, że w przypadku zestawu Z_{U-R} urna U daje graczowi większe szanse na zwycięstwo, niż ruletka daje jego przeciwnikowi. Urna jest więc *lepsza* od ruletki. Jest więc:

$$K \gg U \quad \text{i} \quad U \gg R.$$

9.32. Masz prawo wybrać sobie jeden z trzech przyrządów losujących z rysunku 139. Twój przeciwnik wybierze sobie jeden z dwu pozostałych przyrządów. Każdy z Was wylosuje liczbę za pomocą swojego przyrządu i zwycięży ten, kto wylosuje większą liczbę. Czy skorzystałbyś z prawa pierwszeństwa, które Ci zaoferowano?

Wydaje się oczywiste, że skoro kostka K jest lepsza od urny U a urna U jest lepsza od ruletki R, to kostka K jest lepsza od ruletki R, a więc, że kostka K jest najlepsza. Intuicja podpowiada, że z prawa pierwszeństwa oferowanego Ci w zadaniu 9.32 powinieneś skorzystać i że racjonalną decyzją jest wybór kostki K (bo jest *najlepsza*).

Rozwiązując zadanie 9.31 w przypadku zestawu Z_{R-K} wykażesz, że ten intuicyjny wniosek jest błędny. Ruletka R jest *lepsza* od kostki, a więc kostka K nie jest najlepsza. Jest zatem

$$K \gg U \quad \text{i} \quad U \gg R \quad \text{i} \quad R \gg K.$$

Relacja $\gg$ w zbiorze $\{K, U, R\}$ nie jest zatem przechodnia. Z tego faktu wynika zaskakujący wniosek: wśród trzech przyrządów losujących z rysunku 139 nie ma najlepszego, do każdego istnieje wśród pozostałych dwu przyrząd *lepszy*. Lepsza od urny U jest kostka K, lepsza od ruletki R jest urna U, a lepsza od kostki K jest ruletka R.

Z rowiązania zadania 9.31 wynika ciekawy wniosek. Jakikolwiek z przyrządów losujących z rysunku 139 byś wybrał mając prawo pierwszeństwa, Twój przeciwnik ma możliwość wyboru przyrządu lepszego, tj. przyrządu, który w grze da mu większe (od Twoich) szanse na zwycięstwo. Z oferowanego prawa pierwszeństwa, gdy chodzi o wybór przyrządu losującego, nie należy korzystać. Rodzi się tu pytanie, jak wytłumaczyć ten paradoks?

Zauważ, że kostę K i urnę U porównywaliśmy w przestrzeni probabilistycznej, która jest modelem rzutu kostką K i losowania kuli z urny U (doświadczenie δ_{K-U}). Porównując urnę U z ruletką R przeszliśmy do nowej przestrzeni probabilistycznej. Porównywanie ruletki R i kostki K odbywa się w jeszcze innej przestrzeni probabilistycznej. Nie mamy więc prawa oczekiwać, że relacja $\gg$ będzie przechodnia w zbiorze $\{K, U, R\}$.

9.7. Prawdopodobieństwo klasyczne

9.33. Za chwilę zostanie rzucona moneta n razy. W modelu probabilistycznym tego doświadczenia losowego oblicz prawdopodobieństwa następujących zdarzeń:
A={*reszka wypadnie co najwyżej raz*},
B={*reszka wypadnie co najmniej raz*},
C_k={*reszka wypadnie dokładnie k razy*} gdzie $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.
Czy zdarzenia A i B są przeciwne?

□ Wszystkie wyniki n-krotnego rzutu monetą są jednakowo prawdopodobne i jest ich 2^n (por. zad. 9.15). Z definicji prawdopodobieństwa zdarzenia liczba $P(A)$ jest sumą prawdopodobieństw wszystkich wyników sprzyjających zdarzeniu A. W tym przypadku $P(A)$ jest sumą, której każdy składnik jest równy $\frac{1}{2^n}$. Ta suma jest zatem iloczynem $\overline{\overline{A}} \cdot \frac{1}{2^n}$, gdzie $\overline{\overline{A}}$ jest liczbą wyników sprzyjających zdarzeniu A, czyli mocą zbioru A. Nietrudno policzyć, że $\overline{\overline{A}} = 1 + n$, a zatem $P(A) = (1 + n) \cdot \frac{1}{2^n}$, czyli $\frac{1+n}{2^n}$. Zauważ, że

$$\frac{1+n}{2^n} = \frac{\textit{liczba wyników sprzyjających zdarzeniu } A}{\textit{liczba wszystkich możliwych wyników}}.$$

Ostatni przykład podsuwa ideę prostego obliczania prawdopodobieństwa zdarzenia w klasycznej przestrzeni probabilistycznej.

Niech $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s\}$ i $p(\omega_j) = \frac{1}{s}$ dla $j = 1, 2, \ldots, s$. Para (Ω, p) jest zatem klasyczną przestrzenią probabilistyczną. Nie jest teraz ważne, czy jest ona modelem jakiegoś doświadczenia losowego. Niech $A \subset \Omega$. Jest więc A zdarzeniem w przestrzeni probabilistycznej (Ω, p). Z definicji prawdopodobieństwa zdarzenia wynika, że:

1° Jeśli $A = \emptyset$ (A jest zdarzeniem niemożliwym), to $\overline{\overline{A}} = 0$. Z definicji 9-7 wynika, że $P(A) = 0$. Ale $0 = \frac{0}{s} = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$. Wynika stąd, że $P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$.

2° Jeśli $A = \{\omega\}$, gdzie $\omega \in \Omega$ (A jest zdarzeniem prostym), to (z definicji 9-7) $P(A) = p(\omega) = \frac{1}{s}$. Zauważmy, że $\frac{1}{s} = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$, a zatem $P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$.

3° Załóżmy, że A jest k-elementowym podzbiorem zbioru Ω. Z definicji 9-7 wynika, że $P(A)$ jest sumą k składników, z których każdy jest równy $\frac{1}{s}$, czyli

$$P(A) = k \cdot \frac{1}{s} = \frac{k}{s} = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}},$$

a więc także w tym przypadku mamy: $P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$. Udowodniliśmy zatem następujące twierdzenie:

Twierdzenie 9-2 [TWIERDZENIE KLASYCZNE] *Jeśli (Ω, p) jest klasyczną przestrzenią probabilistyczną i $A \subset \Omega$, czyli A jest zdarzeniem w tej przestrzeni, to $P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$.*
Jest to treść tzw. *twierdzenia klasycznego*[12], zwanego także *twierdzeniem Laplace'a*.

Definicja 9-8 [PRAWDOPODOBIEŃSTWO KLASYCZNE] Jeżeli (Ω, p) jest klasyczną przestrzenią probabilistyczną, to prawdopodobieństwo P w tej przestrzeni nazywa się *prawdopodobieństwem klasycznym*.

[12] To twierdzenie bywa często mylnie nazywane *klasyczną definicją prawdopodobieństwa*.

Aby obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia A w klasycznej przestrzeni probabilistycznej (Ω, p), wystarczy znać moce dwu zbiorów: Ω i A. W tej sytuacji do rachunku prawdopodobieństwa wkracza więc kombinatoryka.

Twierdzenie 9-3 *Jeśli przestrzeń probabilistyczna jest klasyczna, to dwa zdarzenia są w tej przestrzeni jednakowo prawdopodobne wtedy i tylko wtedy, gdy są równoliczne.*

Twierdzenie klasyczne Laplace'a orzeka, że:

Jeżeli modelem doświadczenia jest klasyczna przestrzeń probabilistyczna (Ω, p) i A jest zdarzeniem związanym z tym doświadczeniem $(A \subset \Omega)$, to

$$P(A) = \frac{\textit{liczba wyników sprzyjających zdarzeniu } A}{\textit{liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia}}.$$

Powróćmy do zdarzeń B i C_k z zadania 9.33. Zdarzenie B jest przeciwne do zdarzenia $D = \{\textit{reszka nie wypadnie ani raz}\}$ i $P(D) = \frac{1}{2^n}$, a zatem $P(B) = 1 - \frac{1}{2^n}$.

Wynik n-krotnego rzutu monetą jest n-wyrazową wariacją zbioru $\{o, r\}$. Zdarzeniu C_k sprzyjają te i tylko te wyniki, które są wariacjami o dokładnie k wyrazach równych r. Wariację, w której dokładnie k wyrazów jest równych k, da się utworzyć na $\binom{n}{k}$ sposobów, a zatem

$$P(C_k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n} = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

9.34. Na s. 161 opisano kilka zdarzeń związanych z trzykrotnym losowaniem bez zwracania sześcianu z pojemnika, w którym są dwa sześciany białe i dwa czerwone (wszystkie przystające, a zatem nierozróżnialne w dotyku). Z kolejno wylosowanych sześcianów jest stawiana wieża. W przestrzeni probabilistycznej tego doświadczenia losowego oblicz prawdopodobieństwa tych zdarzeń.

9.35. W zadaniu 9.26 (s. 163) określono kilka zdarzeń związanych z dwukrotnym rzutem kostką. W modelu probabilistycznym dwukrotnego rzutu kostką oblicz prawdopodobieństwa tych zdarzeń.

9.36. W zadaniu 9.24 (s. 162) opisano kilka zdarzeń związanym z losowym rozkładaniem w rzędzie trzech, uprzednio potasowanych, kart: waleta (J), damy (Q) i króla (K). Oblicz prawdopodobieństwa tych zdarzeń.

9.37. W grze losowej uczestniczy dwu graczy: G_A i G_B. Każdy rzuci kostką. Jeśli iloczyn liczb wyrzuconych oczek na dwu kostkach nie będzie większy niż 18, to zwycięża gracz G_A, jeśli ten iloczyn będzie większy od 18, to zwycięży gracz G_B. Wydaje się, że gra jest sprawiedliwa, wszak zbiór liczb od 1 do 18 jest równoliczny ze zbiorem liczb od 19 do 36 $(36 = 2 \cdot 18)$. Czy jest tak rzeczywiście? Powtórz taką grę kilka razy i sprawdź, czy Twoja odpowiedź intuicyjna jest właściwa.

Rozwiązanie zadania prezentuje rysunek 141. Doświadczenie losowe przeprowadzane w grze można traktować jako dwukrotny rzut kostką. Zbiór jego wyników przedstawia rysunek 141*a*. Na rysunku 141*b* – w miejsce wyniku wpisano iloczyn liczb wyrzuconych oczek.

Z dwukrotnym rzutem kostką związmy zdarzenie:

$$A = \{\textit{iloczyn liczb wyrzuconych oczek będzie większy niż } 18\}.$$

Zdarzenie A przedstawiono na rysunku 141*b*, a więc $P(B) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$. Gracz G_B ma w grze opisanej w zadaniu 9.37 mniejsze szanse niż gracz G_A.



Rys. 141 Zbiór wyników dwukrotnego rzutu kostką i zdarzenie A jako jego podzbiór

W urnie $U_{1\to s}$ jest s kul ponumerowanych od 1 do s. Z tej urny będzie losowana kula s razy bez zwracania. Oznaczajmy to doświadczenie losowe przez δ_s. Jeśli za j-tym razem zostanie wylosowana kula o numerze j, to mówimy o *skojarzeniu*.

9.38. Z s-krotnym losowaniem bez zwracania kuli z urny $U_{1\to s}$ związmy zdarzenia:

$A_j = \{\textit{w tym losowaniu nastąpi dokładnie } j \textit{ skojarzeń}\}$ dla $j = 0, 1, 2, \ldots, s$,

$A = \{\textit{w losowaniu nastąpi co najmniej jedno skojarzenie}\}$,

$B_k = \{\textit{na } k\textit{-tym etapie nastąpi skojarzenie}\}$, gdzie $k = 1, 2, 3, \ldots, s$.

Określ model probabilistyczny doświadczenia losowego, o którym tu mowa. Czym jest zdarzenie A_{s-1}. Oblicz $P(A_s)$. Wykaż, że $P(B_k) = \frac{1}{s}$ dla każdego $k = 1, 2, 3, \ldots, s$. Niech $s = 3$. Co ma w tym przypadku wspólnego to zadanie z zadaniem 9.26?

□ Niech $S = \{1, 2, 3 \ldots, s\}$ (S jest zbiorem numerów kul w urnie $U_{1\to s}$). Wynikiem doświadczenia losowego δ_s jest permutacja zbioru S. Jej j-ty wyraz jest numerem kuli wylosowanej za j-tym razem. Wszystkie wyniki są jednakowo prawdopodobne i jest ich $s!$. Modelem doświadczenia δ_s jest zatem klasyczna przestrzeń probabilistyczna.

Zdarzeniu B_k sprzyjają te (i tylko te) permutacje zbioru S, których k-tym wyrazem jest liczba k. Takich permutacji jest $(s-1)!$, a więc

$$P(B_k) = \frac{(s-1)!}{s!} = \frac{(s-1)!}{(s-1)!\cdot s} = \frac{1}{s}.$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia B_k nie zależy od k.

Zauważ, że:

— zdarzenie A_{s-1} jest niemożliwe (dlaczego?), a zatem $P(A_{s-1}) = 0$,

— zdarzeniu A_s sprzyja tylko jeden wynik losowania (A_s jest zdarzeniem prostym), a zatem $P(A_s) = \frac{1}{s!}$.

■ Niech $s = 3$. Drzewo doświadczenia δ_3 prezentuje rysunek 142. Z symetrii wynika, że modelem tego doświadczenia jest klasyczna przestrzeń probabilistyczna (Ω, p), gdzie

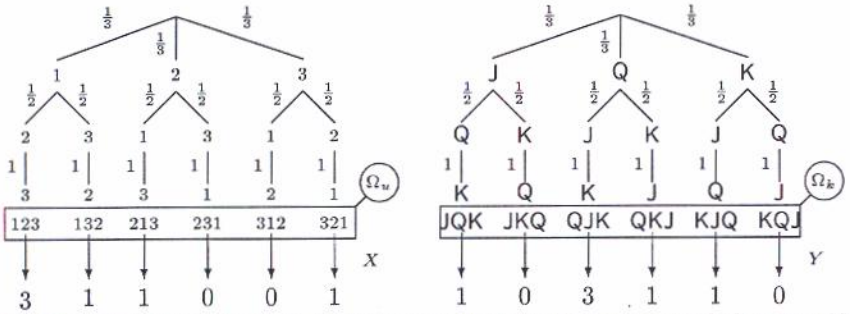
$$\Omega = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\} \quad \text{oraz} \quad p(\omega) = \tfrac{1}{6} \text{ dla każdego } \omega \in \Omega.$$

Aby przedstawić zdarzenia A_0, A_1, A_2 i A_3 jako podzbiory zbioru Ω można każdemu wynikowi losowania przypisać liczbę uzyskanych skojarzeń. Tę funkcję określono na rysunku 142 grafem strzałkowym.

■ Rysunek 142 przedstawia drzewo dla trzykrotnego losowania bez zwracania kuli z urny $U_{1\to 3}$ i liczbę skojarzeń jako funkcję X. Z tego rysunku wynika, że zdarzenia, o których mowa w zadaniu 9.38, są następującymi zbiorami

$$B_1 = \{123, 132\}, \quad B_2 = \{123, 321\}, \quad B_3 = \{123, 213\}.$$

Zdarzenia te są równoliczne a przestrzeń probabilistyczna jest klasyczna, a zatem te zdarzenia są jednakowo prawdopodobne. Jest $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.



Rys. 142 Drzewa stochastyczne dla trzykrotnego losowania bez zwracania kuli z urny $U_{1\to 3}$ i rozkładania w rzędzie trzech kart oraz liczby skojarzeń i trafień jako funkcje

9.39. Po potasowaniu trzech kart: waleta J, damy Q i króla K, karty zostaną rozłożone w rzędzie. O tym, która karta trafi na pierwsze miejsce, która na drugie, a która na trzecie, decyduje przypadek.

a) Określ model probabilistyczny doświadczenia losowego δ_k.

b) Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń związanych z doświadczeniem δ_k:

$A = \{$*na pierwsze miejsce trafi walet*$\}$,

$B = \{$*na drugie miejsce trafi walet albo król*$\}$,

$C = \{$*król trafi na pierwsze albo na trzecie miejsce*$\}$.

c) Zanim zostanie przeprowadzone doświadczenie losowe δ_k, gracz stawia na jego wynik, wpisując na kolejne miejsce w tabelce |...|...|...|, kod karty, która jego zdaniem trafi na to miejsce. Jeśli karty zostaną już rozłożone w rzędzie, to gracz zdobywa tyle punktów, ile uzyska *trafień*, tj. w ilu przypadkach uda mu się trafnie przewidzieć kartę na danym miejscu. Załóżmy, że gracz postawił na wynik QJK. Rozważmy zdarzenia:

$C_j = \{$*gracz uzyska dokładnie j trafień*$\}$ dla $j = 0, 1, 2, \ldots, s$,

$C = \{$*gracz uzyska co najmniej jedno trafienie*$\}$,

$D_k = \{$*na k-tym miejscu gracz trafnie wytypuje kartę*$\}$ dla $k = 1, 2, 3, \ldots, s$.

Oblicz $P(C_j)$ dla $j = 0, 1, 3$. Czym jest zdarzenie C_2.

Wykaż, że $P(D_k) = \frac{1}{s}$ dla każdego $k = 1, 2, 3$.

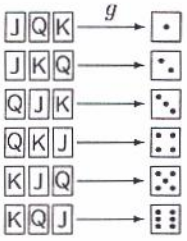
d) Jak wytłumaczysz analogie, jakie pojawiły się między powyższymi problemami a problemami z zadania 9.38?

Na rysunku 142 mamy drzewo dla losowego rozkładania trzech kart na trzech miejscach w rzędzie oraz graf funkcji Y, która wynikowi tego rozkładania przypisuje liczbę trafień uzyskanych przez gracza, który postawił na wynik QJK.

9.40. Zginęła Ci kostka do gry. Czy można ją zastąpić trzema kartami, o których mowa w poprzednim zadaniu? Jak symulować rzut kostką za pomocą waleta, damy i króla?

Przedstawiona na rysunku 143 funkcja jest bijekcją ze zbioru wyników rozkładania w rzędzie trzech (uprzednio potasowanych) kart na zbiór wyników rzutu kostką. Aby uzyskać wynik rzutu kostką, wystarczy potasować trzy karty i rozłożyć je w rzędzie. Bijekcja, o której tu mowa, jest słownikiem do tłumaczenia wyniku rozkładania kart

na wynik rzutu kostką. Jeśli rozkładanie potasowanych kart zakończy się wynikiem KQJ, to znaczy, że wypadła szóstka.



Rys. 143 Bijekcja g jako słownik do tłumaczenia wyniku rozkładania kart na wynik rzutu kostką

9.41. Losowanie jednej z grona sześciu osób postanowiono przeprowadzić metodą *marynarza*. Na znak każda z osób wystawi pewną („na chybił trafił" wybraną) liczbę palców. Suma liczb wystawionych palców zostanie następnie odliczona (tak, jak się odlicza wyliczankę przy grze *w berka*). Ten, na kogo wypadnie liczba wszystkich wystawionych palców, zostanie uznany za wylosowanego. Czy w takim losowaniu każda z sześciu osób ma równe szanse?

Załóżmy, że są to osoby $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6$ i że liczba łącznie wystawionych palców będzie odliczana w kolejności $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_1, \ldots$ itd. Niech a_j oznacza liczbę palców wystawionych przez osobę G_j $(j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Wynik doświadczenia, o jakim tu mowa, jest ciągiem $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$, a więc sześciowyrazową wariacją zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Niech Ω oznacza zbiór wszystkich takich wariacji. Jest ich 5^6 i każda jest jednakowo prawdopodobna[13]. Takie wystawianie palców jest doświadczeniem losowym o klasycznym modelu probabilistycznym (Ω, p), gdzie

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}^6 \quad \text{i} \quad p(\omega) = \tfrac{1}{5^6} \quad \text{dla każdego} \quad \omega \in \Omega.$$

Z tym losowym wystawianiem palców związmy zdarzenia:

$A_j = \{$*reszta z dzielenia liczby wystawionych palców przez 6 będzie równa* $j\}$ dla $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Osoba G_j, dla $j = 1, 2, 3, 4, 5$, zostanie wylosowana wtedy i tylko wtedy, gdy zajdzie zdarzenie A_j. Osoba G_6 zostanie wylosowana – gdy zajdzie zdarzenie A_0. W klasycznej przestrzeni probabilistycznej (Ω, p) zdarzenia $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ tworzą układ zupełny zdarzeń. Zdarzenia te nie są zbiorami równolicznymi, bo 6 nie jest dzielnikiem liczby 5^6, a zatem nie są to zdarzenia jednakowo prawdopodobne. W losowaniu metodą *marynarza* jednej z sześciu osób, ich szanse nie są zatem równe (to losowanie nie jest sprawiedliwe).

Twierdzenie klasyczne pozwala prostymi środkami obliczać prawdopodobieństwo zdarzenia w klasycznej przestrzeni probabilistycznej. Ale – jak to ukazuje ostatnie zadanie – pozwala także dowodzić, że pewne zdarzenia w takiej przestrzeni nie są jednakowo prawdopodobne (bo nie są równoliczne).

[13] Wydaje się naturalne przyjęcie założenia, że każda z osób wystawia palce niezależnie od innych osób i że dla każdej z liczb palców jednej ręki, prawdopodobieństwo wystawienia tej liczby palców jest równe $\frac{1}{5}$.

9.8. Prawdopodobieństwo jako ocena szansy i ryzyka

Losowanie kuli z urny U, w której jest 100 kul, jedna czerwona i 99 białych jest doświadczeniem losowym o dwu możliwych wynikach:

`b - wylosowana kula będzie biała i c - wylosowana kula będzie czerwona.`

Prawdopodobieństwo wylosowania czerwonej kuli z urny U jest równe $\frac{1}{100}$. Wylosowanie czerwonej kuli z urny U jest bardzo mało prawdopodobne. Wylosowanie czerwonej kuli z urny U nie jest niemożliwe, ale jest tak mało prawdopodobne, że można je uważać za *praktycznie niemożliwe*. Przed losowaniem można być praktycznie pewnym, że wylosowana z urny kula będzie biała. Nie można być tego pewnym, można być tego praktycznie pewnym.

Wnioskowania dotyczące procesu podejmowania decyzji, weryfikacji pewnych hipotez[14] oparte są na następującej *zasadzie:*

> [ZASADA PRAKTYCZNEJ PEWNOŚCI] Jeśli zdarzenie związane z doświadczeniem losowym δ jest bardzo mało prawdopodobne, to można być praktycznie pewnym, że ono nie zajdzie, gdy za chwilę (jutro, za rok) przeprowadzimy to doświadczenie.

W praktyce zdarzenie uznaje się za bardzo mało prawdopodobne, jeśli jego prawdopodobieństwo jest mniejsze od $\frac{5}{100}$.

Definicja 9-9 [ZDARZENIE PRAKTYCZNIE NIEMOŻLIWE] Zdarzenie A w przestrzeni probabilistycznej (Ω, p) nazywamy *praktycznie niemożliwym*, jeśli $P(A) < \alpha = 0,05$.

Definicja 9-10 [ZDARZENIE PRAKTYCZNIE PEWNE] Zdarzenie B w przestrzeni probabilistycznej (Ω, p) nazywamy *praktycznie pewnym*, jeśli $P(A) > 0,95$.

9.42. Za chwilę rzucisz 6 razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:
$A = \{$*wypadną wszystkie liczby oczek*$\}$,
$B = \{$*przynajmniej dwa razy wypadnie taka sama liczba oczek*$\}$,
$C = \{$*w każdym rzucie wypadnie ta sama liczba oczek*$\}$.

□ Jest $P(A) = \frac{6!}{6^6} \approx 0,015432 < 0,05$ oraz $P(B) = 1 - P(A) > 0,95$. Zdarzenie A jest praktycznie niemożliwe, zdarzenie B jest praktycznie pewne.

9.43. Z ciasta, do którego wsypano 6 rodzynków, zostanie uformowanych i wypieczonych sześć jednakowych babek. Jak bardzo jest prawdopodobne, że w *każdej babce będzie rodzynek*? Znajdź prawdopodobieństwo, że *wszystkie rodzynki znajdą się w jednej babce*? Znajdź prawdopodobieństwo tego, że *przynajmniej jedna babka będzie bez rodzynków*?

9.44. Z urny o dwu kulach czerwonych i $(s-2)$ białych będą losowane dwie kule. Dla jakiego najmniejszego s wylosowanie dwóch kul czerwonych jest praktycznie niemożliwe?

9.45. Na klasówce z chemii uczeń dostaje listę z nazwami dwudziestu związków chemicznych, wśród których są dwa aldehydy. Uczeń ma je podkreślić. Za prawidłowe wskazanie obu aldehydów dostaje ocenę pozytywną. Załóżmy, że Antek nic nie umie z chemii. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w drodze zgadywania Antek trafi na oba aldehydy, a więc dostanie pozytywną ocenę, choć na nią nie zasłużył?

[14] Np. rozstrzygania na gruncie matematyki, czy dany fakt jest rezultatem wiedzy, talentu, czy też przypadku, a więc zgadywania (czasami mówimy: szczęścia lub pecha).

□ Prawdopodobieństwo, o którym mowa w zadaniu, jest oceną *szansy*, że Antek, nie ucząc się, uzyska ocenę pozytywną. Dla nauczyciela chemii jest ono oceną *ryzyka*, że postawi uczniowi ocenę pozytywną a uczeń na nią nie zasłużył, bo nic z chemii nie umie. Lista dwudziestu związków chemicznych jest dla Antka urną, w której jest 20 kul, dwie są czerwone (to aldehydy) i 18 białych. Prawdopodobieństwo wylosowania dwu kul czerwonych z opisanej urny jest równe $\frac{1}{190}$.

Ryzyko, o którym myśli nauczyciel chemii, jest bardzo małe ($\frac{1}{190} \approx 0{,}00526$). Ocenę pozytywną z takiej klasówki możemy więc uważać za wiarygodną.

9.46. Na klasówce z j. polskiego uczeń dostaje dwie kartki. Na jednej są cytaty s autorów, a na drugiej nazwiska tych s autorów. Uczeń ma do każdego cytatu wskazać jego autora. Jeśli prawidłowo skojarzy każdy cytat z jego autorem, to dostaje ocenę pozytywną. Czy taka ocena jest wiarygodna, gdy $s = 10$? A czy jest wiarygodna w przypadku $s = 3$?

□ W przypadku $s = 10$ prawdopodobieństwo prawidłowego skojarzenia wszystkich cytatów z ich autorami przez ucznia, który nic nie umie, jest równe $\frac{1}{10!}$, tj. $\frac{1}{3\,628\,800}$. Jest więc praktycznie niemożliwe, aby uczeń, który nic nie umie z literatury, mógł uzyskać pozytywną ocenę.

□ Niech $s = 3$. Prawdopodobieństwo uzyskania pozytywnej oceny przy braku wiedzy, tj. w drodze zgadywania, wynosi $\frac{1}{6}$. Nie jest ono małe. Ryzyko postawienia oceny pozytywnej uczniowi, który na nią nie zasłużył (bo nic nie umie), jest zbyt duże.

9.47. Z dziesięciokrotnym rzutem monetą wiąże się zdarzenie $A_k = \{$*reszka wypadnie co najmniej k razy*$\}$. Oblicz $P(A_9)$. Dla jakiego najmniejszego k zdarzenie A_k jest praktycznie niemożliwe?

9.48. Test z geografii zawiera 10 pytań. Na każde trzeba odpowiedzieć *tak* lub *nie*. Za wszystkie 10 poprawnych odpowiedzi uczeń dostaje ocenę pozytywną. Czy jest ona wiarygodna? Jakie jest prawdopodobieństwo, że uczeń, nie mając wiedzy z materiału objętego testem, poda 10 poprawnych odpowiedzi?

□ Prawdopodobieństwo uzyskania 10 poprawnych odpowiedzi w drodze zgadywania jest równe prawdopodobieństwu wyrzucenia 10 reszek w 10-krotnym rzucie monetą, a więc jest równe $(\frac{1}{2})^{10}$, czyli 0,0 009 765. Uzyskanie 10 trafień w drodze zgadywania jest praktycznie niemożliwe. Za wskazanie 10 poprawnych odpowiedzi można stawiać ocenę pozytywną. Znalezione prawdopodobieństwo jest dla ucznia oceną pewnych szans, dla nauczyciela zaś oceną pewnego ryzyka.

9.49. Dziecko bawiąc się siedmioma klockami z literami E,I,K,O,P,R,T ułożyło słowo PIOTREK. Oblicz, jak bardzo jest prawdopodobne ułożenie takiego sensownego słowa przez to dziecko w sytuacji, gdyby jeszcze nie umiało czytać. Czy są podstawy, by sądzić, że dziecko to umie już czytać?

9.50. Wróćmy do zamykanej na szyfr kłódki z rysunku 108 (por. zadanie 8.19 na s. 138). Jakie są szanse, że wspomnianą kłódkę otworzysz w pierwszej próbie? Czy taka kłódka (jeśli znałbyś jej szyfr) dobrze chroniłaby Twoją piwnicę przed złodziejem?

Szanse, o których tu mowa, są zarazem szansami złodzieja, że w jednej próbie zdoła otworzyć kłódkę. W sytuacji, gdy kłódka chroni Twoją piwnicę, wspomniane szanse są dla Ciebie oceną *ryzyka*, że złodziej okradnie Ci piwnicę. Złodziej mówi tu o *szansach* otwarcia kłódki, Ty – o *ryzyku*. W obu przypadkach mowa jest o pewnym prawdopodobieństwie.

9.51. Aby otworzyć pierwszą kłódkę z rysunku 114 na s. 143, trzeba nacisnąć cztery z dziesięciu przycisków oznaczonych cyframi od 0 do 9. Kolejność naciskania nie gra roli. Czy taka kłódka dobrze chroni dobytek przed złodziejem? Czy kupiłbyś taką kłódkę np. do Twojej piwnicy? Jak uzasadniłbyś na gruncie rachunku prawdopodobieństwa tę decyzję?

9.52. Druga kłódka z rysunku 114 otwiera się, jeśli wciśnie się sześć (znanych tylko właścicielowi kłódki) z dziesięciu przycisków. Czy ta kłódka dobrze spełnia swoją rolę? Która z dwu pierwszych kłódek z rysunku 114 lepiej chroni przed złodziejem?

9.53. Aby otworzyć trzecią kłódkę z rysunku 114 trzeba każdy z czterech pierścieni (podzielonych na 10 sektorów) ustawić na odpowiednim sektorze. Jakie jest prawdopodobieństwo, że złodziej, który nie zna szyfru tej kłódki, zdoła ją otworzyć w jednej próbie?

9.54. Antek twierdzi, że trzecia kłódka i pierwsza z rysunku 114 są „jednakowo dobre", bo w każdej szyfr stanowią 4 liczby z dziesięciu. Czy Antek ma rację? Dlaczego? Zdaniem Bolka pierwsza kłódka jest lepsza niż druga, bo jest więcej sposobów wybrania czterech cyfr z dziesięciu, niż sześciu z dziesięciu. Czy Bolek ma rację? Dlaczego?

9.55. Którą z trzech kłódek z rysunku 114 poradziłbyś mi kupić do zamykania piwnicy? Która z nich jest najlepsza? Jak to uzasadnić na gruncie matematyki?

Problem dotyczy oceny prawdopodobieństwa tego, że złodziej trafi na szyfr kłódki. Dla złodzieja to prawdopodobieństwo jest oceną jego szansy, dla właściciela – jest ono oceną pewnego ryzyka.

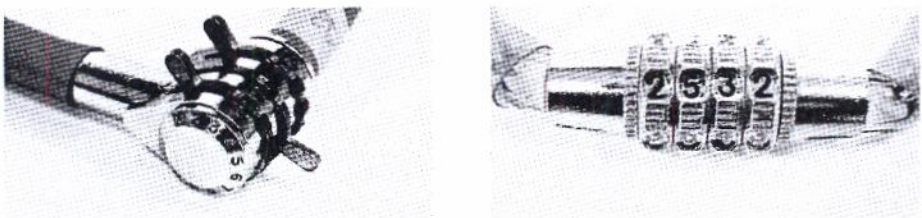
Zauważ, że

$$\binom{10}{4} = \binom{10}{6} = \frac{10!}{4!\cdot 6!} = 210,$$

a zatem prawdopodobieństwo, że w jednej próbie złodziej otworzy pierwszą kłódkę z rysunku 114, jest równe $\frac{1}{210}$, tj. około 0,004 75 (oczywiście, jeśli wie, że należy nacisnąć 4 przyciski). Otwarcie kłódki w jednej próbie przez złodzieja jest praktycznie niemożliwe. Analogicznie jest w przypadku drugiej kłódki. Obie te kłódki są „jednakowo dobre". Prawdopodobieństwo otwarcia trzeciej kłódki z rysunku 114 jest równe $\frac{1}{10000}$. I ta kłódka jest najlepsza.

Kłódki z rysunku 114 ukazują istotę różnic takich pojęć kombinatoryki, jak: k-elementowa kombinacja (jako podzbiór) i k-wyrazowa wariacja (jako ciąg).

Na rynku pojawiają się coraz to nowe blokady do zabezpieczenia roweru przed złodziejem. Oprócz blokad zamykanych na kluczyk, pojawiają się blokady zamykane na szyfr. Dwie tego typu blokady przedstawia rysunek 144.



Rys. 144 Szyfrowe blokady do roweru

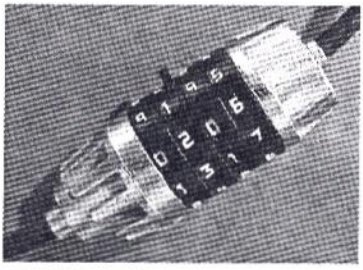
Zamek pierwszej blokady z rysunku 144 składa się z trzech współśrodkowych tarcz. Każda jest podzielona na 10 sektorów oznaczonych cyframi od 0 do 9. Wokół

każdej tarczy obraca się rączka. Blokada zostaje zwolniona, gdy każdą z trzech rączek ustawi się na odpowiednim sektorze. Numery tych sektorów stanowią szyfr blokady. Szyfr jest więc trzywyrazową wariacją zbioru $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Zamek drugiej blokady z rysunku 144 składa się z czterech obracających się pierścieni podzielonych na 6 sektorów oznaczonych cyframi od 1 do 6. Blokada zostaje zwolniona, gdy każdy pierścień ustawi się odpowiednim sektorem wzdłuż kreski zaznaczonej na nieruchomej krawędzi.

9.56. Którą z tych blokad doradziłbyś mi kupić do ochrony roweru przed złodziejem? Która z nich lepiej chroni rower przed kradzieżą? Jak mnie o tym przekonasz?

Za lepszą można uważać tę blokadę, której linka jest grubsza, której zamek jest zrobiony solidniej itd. Ale nie o te kryteria natury technicznej tu chodzi. Dla nas lepsza jest ta z blokad, dla której ryzyko jej zwolnienia przez przypadkowy dobór sektorów (np. przez złodzieja) jest mniejsze.



Rys. 145 Blokada do roweru zamykana na szyfr

9.57. Rysunek 145 prezentuje kolejną blokadę do ochrony roweru przed złodziejem. Aby ją otworzyć należy każdy z czterech pierścieni ustawić (wzdłuż zaznaczonej kreski) na odpowiednim sektorze (tj. na odpowiedniej cyfrze, cyfry kolejnych pierścieni tworzą kod). Ile jest różnych (gdy chodzi o kod) blokad tego typu? Czy kupiłbyś taką blokadę do ochrony swojego roweru przed złodziejem? Jak uzasadniłbyś swą decyzję?

W przypadku różnych kłódek ryzyko, że złodziej ją otworzy w jednej próbie, okazuje się różne. Ale zawsze jest ono bardzo małe. Trafienie przez złodzieja na szyfr (i otwarcie kłódki) uznajemy więc za praktycznie niemożliwe. Ten fakt pozwala uznać za racjonalną decyzję kupienia takiej kłódki do ochrony dobytku przed złodziejem.

Coraz częściej drzwi garaży, bramy wjazdowe do zabudowań, drzwi wejściowe do magazynów lub mieszkań zaopatrzone są w zamki szyfrowe o skomplikowanych kodach. Chodzi o to, by ryzyko ich otwarcia przez niepowołaną osobę (np. złodzieja) było jak najmniejsze.

9.58. Wróćmy do szyfrowego zamka do drzwi wejściowych z rysunku 115 (por. zadanie 8.34 na s. 144). Jakie jest prawdopodobieństwo, że nacisnąwszy cztery przyciski, wybrane na „chybił trafił" (nie znasz bowiem kodu), uda Ci się otworzyć tak zamykane drzwi wejściowe? Czy ten sposób zabezpieczenia domu przed intruzami można uznać za dobry?

9.59. Na egzaminie testowym student dostaje zestaw dziesięciu funkcji, wśród których są 4 różnowartościowe, a student ma je wskazać. Czy jest wiarygodna pozytywna ocena za wszystkie trafnie wskazane funkcje różnowartościowe? Co ma wspólnego to pytanie z poprzednim zadaniem?

9.60. Powróćmy do zadania 8.15 (s. 136). Drzwi wejściowe na zaplecze (wejście dla personelu) otwiera się na szyfr. Zamek szyfrowy ma 10 przycisków (zob. rysunek 107). Aby drzwi otworzyć trzeba w odpowiedniej kolejności nacisnąć cztery przyciski. Jak wielkie jest ryzyko, że intruzowi, który naciśnie cztery przyciski, uda się wejść na zaplecze McDonalda? Czy ten zamek dobrze spełnia swoją rolę?

W ostatnich czasach stają się popularne teczki i walizki zamykane na szyfr.



a) *b)*

Rys. 146 Dwie teczki-aktówki zamykane na szyfr

9.61. Pierwsza teczka z rysunku 146 zamyka się na szyfr, który składa się z czterech cyfr, znanych tylko jej właścicielowi. Druga teczka zamyka się na dwa zamki szyfrowe. Szyfr każdego składa się z trzech cyfr, które ustala sobie sam właściciel. Ile jest teczek pierwszego typu o różnych szyfrach, a ile jest takich teczek drugiego typu. Antek twierdzi, że różnych teczek drugiego typu jest $1000 + 1000$. Bolek twierdzi, że jest ich $1000 \cdot 1000$. Kto z nich ma rację?

9.62. Dla każdej z teczek-aktówek z rysunku 146 oceń ryzyko jej otwarcia (w jednej próbie) przez postronnego człowieka.



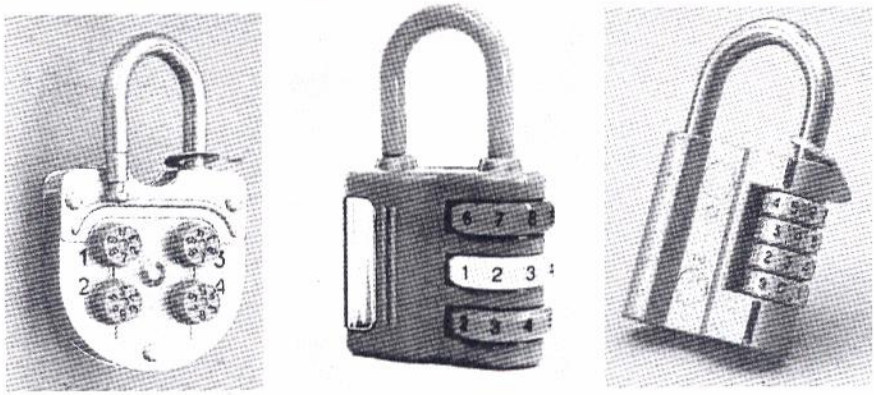
Rys. 147 Zamykana na szyfr skarbonka



Rys. 148 Skarbonka *Electronic Safe*

9.63. Drzwiczki skarbonki BANK z rysunku 147 dają się otworzyć, jeśli każdą z gałek ustawi się na odpowiedniej cyfrze. Te cyfry kodu znane są tylko właścicielowi skarbonki. Jakie jest prawdopodobieństwo (ryzyko), że przy ustawieniu gałki na przypadkowo wybranych cyfrach, intruz otworzy skarbonkę. Wskaż wśród opisanych wcześniej kłódek, blokad i zamków te, których zasada działania jest identyczna jak owej skarbonki.

9.64. Na rysunku 148 mamy kolejną skarbonkę zamykaną na szyfr. Aby otworzyć jej drzwiczki trzeba nacisnąć 4 przyciski i to w odpowiedniej kolejności, przy czym ten sam przycisk można naciskać więcej razy. Cyfry na tych przyciskach tworzą szyfr. Jakie jest prawdopodobieństwo, że złodziej otworzy tę skarbonkę w jednej próbie? Czy dobrze chroni ta skarbonka pieniądze przed złodziejem? Oczywiście nie dopuszczamy tu możliwości, że złodziej zabierze całą skarbonkę.



Rys. 149 Trzy kłódki zamykane na szyfr

9.65. Szyfr pierwszej kłódki z rysunku 149 składa się z czterech cyfr. Każdą cyfrę ustawia się na innej gałce. Szyfr trzeciej kłódki tworzą także cztery cyfry. Każdą ustawia się na innym, obracającym się pierścieniu podzielonym na 10 sektorów oznaczonych cyframi od 0 do 9. Która z tych dwu kłódek lepiej chroni dobytek przed złodziejem? Sformułowany tu problem jest analogiczny do jednego z wcześniej rozważanych. Którego?

9.66. Druga kłódka z rysunku 149 działa podobnie, jak kłódka trzecia, ale kod stanowią trzy cyfry od 0 do 9. Aby otworzyć kłódkę trzeba każdy z trzech pierścieni ustawić na odpowiedniej cyfrze wzdłuż zaznaczonej kreski. Wskaż, które z przytoczonych sposobów zabezpieczenia mienia przed złodziejem lub intruzem działają analogicznie jak ta kłódka?

Szanse złodzieja na to, że w jednej próbie otworzy drugą kłódkę z rysunku 149 są takie same, jak szanse otwarcia w jednej próbie skarbonki z rysunku 147 a także jak szanse otwarcia pierwszej blokady do roweru z rysunku 144.

Regulamin funkcjonowania pierwszej kłodki z rys. 114 jest identyczny jak regulamin „otwierania drzwi" z rys. 115. Ryzyko otwarcia teczki z rys. 146*a*) jest identyczne, jak ryzyko otwarcia trzeciej kłódki z rys. 114. Ryzyko otwarcia kłódki z rys. 149 jest identyczne, jak ryzyko otwarcia drugiej blokady do roweru z rys. 144.

9.9. Loteria fantowa przynosi zyski

Na rozmaitego typu zabawach i balach organizuje się loterie fantowe, z których dochód przeznaczony jest na jakiś dobroczynny cel. Takie zabawy organizuje szkolny komitet rodzicielski. Ciekawym tematem lekcji matematyki może być organizacja konkursów i loterii na takiej zabawie, gwarantujących określone zyski.

W tradycyjnej loterii fantowej fant zostaje wygrany wraz z nabyciem odpowiedniego losu. Załóżmy, że wśród zgromadzonych fantów jest jeden cenny. Można o niego grać inaczej niż w loterii. Ustalanie regulaminu wygrania tego fantu, aby gra przynosiła zyski, będzie przedmiotem kolejnych zadań z rachunku prawdopodobieństwa.

9.67. Ktoś proponuje Ci zdobycie za złotówkę zegarka wartego 50 zł. Dajesz mu 1 zł, on zaś wręcza Ci sześć kostek do gry. Ty rzucisz kostkami. Jeśli *wypadną same szóstki*, to zegarek stanie się Twoją własnością. Jakie jest ryzyko, że ów człowiek straci zegarek?

9.68. Za drugą złotówkę (jeśli za pierwszą nie wygrałeś zegarka) właściciel proponuje

Ci ponowny zakład. Wygrasz zegarek jeśli w ponownym rzucie sześcioma kostkami *na wszystkich kostkach wypadnie ta sama liczba oczek*. Jak bardzo wzrosły Twoje szanse na wygranie zegarka?

9.69. Na loterii fantowej zaoferowano uczestnikom wygranie cennego fantu. Po wniesieniu opłaty 2 zł. uczestnik loterii dostaje woreczek z dziesięcioma kulami, wśród których są 4 kule czerwone oraz 6 białych i losuje z tej urny 4 kule. Jeśli wszystkie są czerwone, fant staje się jego własnością. Jakie jest prawdopodobieństwo wygrania tego fantu za jedyne 2 zł.? Z rozwiązania którego zadania wynika odpowiedź?

9.70. Jeśli za pierwszym razem uczestnikowi loterii nie udało się wygrać fantu, to teraz zaoferowano mu inny wariant. Po wniesieniu kolejnej opłaty 2 zł. uczestnik loterii może wylosować 6 kul z urny, o której mowa w poprzednim zadaniu. Fant staje się jego własnością, jeśli wszystkie wylosowane kule okażą się białe. Czy zmieniły się teraz szanse na wygranie fantu? Które z zadań dotyczy analogicznego problemu?

9.71. Na klasówce z chemii (por. zad. 9.45 na s. 174) uczeń dostaje zestaw 10 związków chemicznych, wśród których są 4 aldehydy. Uczeń ma je wskazać i za wszystkie prawidłowo wskazane aldehydy dostaje ocenę pozytywną. Czy taka ocena jest wiarygodna? Jak duże jest ryzyko, że nauczyciel postawi ocenę pozytywną, bo uczeń trafnie wskazał wszystkie aldehydy, a ona się mu nie należy, bo uczeń uzyskał ją w drodze zgadywania a nie wiedzy? Rozwiązanie którego zadania daje odpowiedź na to pytanie?

9.72. Załóżmy, że na liście 10 związków chemicznych jest 6 aldehydów. Jeśli uczeń wskaże wszystkie, to dostaje ocenę pozytywną. Czy w takiej sytuacji pozytywna ocena jest wiarygodna? Dlaczego? Rozwiązanie którego z zadań daje odpowiedź na te pytania?

9.10. Zmienna losowa i jej rozkład

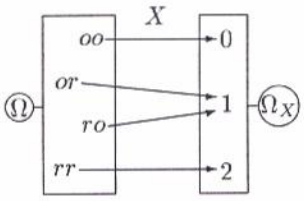
Z każdym wynikiem doświadczenia losowego kojarzymy czasami pewną liczbę. Jeśli o tej liczbie mówimy przed wykonaniem tego doświadczenia, to mamy do czynienia z funkcją, której wartości zależą od przypadku. Jeśli modelem doświadczenia losowego δ jest przestrzeń probabilistyczna (Ω, p), to jest to funkcja ze zbioru Ω w zbiór liczb rzeczywistych. Takie funkcje będziemy dalej oznaczać dużymi, końcowymi literami łacińskiego alfabetu (z ewentualnymi wskaźnikami).

Definicja 9-11 [ZMIENNA LOSOWA] Niech (Ω, p) będzie przestrzenią probabilistyczną (nie jest tu ważne, czy jest ona modelem jakiegoś doświadczenia losowego, czy też nie, jesteśmy bowiem w świecie matematyki). Każdą funkcję X ze zbioru Ω w zbiór liczb rzeczywistych, nazywamy *zmienną losową w tej przestrzeni.*

Zbiór wartości zmiennej losowej X w przestrzeni probabilistycznej (Ω, p), tj. zbiór $X(\Omega)$ oznaczamy Ω_X. Niech $\{X{=}a\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = a\}$ dla $a \in \Omega_X$. Zbiór $\{X{=}a\}$, jako podzbiór zbioru Ω, jest zdarzeniem w przestrzeni probabilistycznej (Ω, p). Jest to zdarzenie: $\{$*zmienna losowa* X *przyjmie wartość* $a\}$. Jego prawdopodobieństwo oznaczamy $P(X{=}a)$ i nazywamy prawdopodobieństwem, z jakim zmienna losowa X przyjmuje wartość a.

Jeśli przestrzeń probabilistyczna (Ω, p) jest modelem doświadczenia losowego δ, to zmienna losowa w tej przestrzeni jest funkcją, która każdemu wynikowi doświadczenia δ przypisuje liczbę rzeczywistą.

9.73. Za chwilę rzucimy monetą dwa razy. Liczba wyrzuconych reszek jest w tej sytuacji (a więc przed rzutem) zmienną losową X w modelu probabilistycznym dwukrotnego rzutu monetą. Określ funkcję X. Przedstaw zdarzenia: $\{X=0\}$, $\{X=1\}$, $\{X=2\}$ jako podzbiory zbioru Ω wyników dwukrotnego rzutu monetą i oblicz ich prawdopodobieństwa.



Rys. 150 Liczba reszek w dwukrotnym rzucie monetą jako zmienna losowa

Modelem dwukrotnego rzutu monetą jest przestrzeń probabilistyczna (Ω, p), gdzie

$$\Omega = \{oo, or, ro, rr\} \quad \text{i} \quad p(\omega) = \tfrac{1}{4} \quad \text{dla każdego} \quad \omega \in \Omega.$$

Liczba wyrzuconych reszek jest funkcją X określoną na zbiorze Ω następująco:

$$X(oo) = 0, \quad X(or) = 1, \quad X(ro) = 1, \quad X(rr) = 2 \quad \text{(por. rysunek 150)},$$

a więc $\Omega_X = \{0, 1, 2\}$. W przestrzeni probabilistycznej (Ω, p) jest:

$$\{X=0\} = \{oo\}, \quad \{X=1\} = \{or, ro\}, \quad \{X=2\} = \{rr\},$$

a zatem:

$$P(X=0) = p(oo) = \tfrac{1}{4}, \; P(X=1) = p(or)+p(ro) = \tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2}, \; P(X=2) = p(rr) = \tfrac{1}{4}.$$

Dla każdej wartości zmiennej losowej X obliczyliśmy prawdopodobieństwo, z jakim zmienna losowa X może tę wartość przyjąć. Na zbiorze Ω_X określiliśmy funkcję p_X, gdzie

$$p_X(0) = \tfrac{1}{4}, \quad p_X(1) = \tfrac{1}{2} \quad i \quad p_X(2) = \tfrac{1}{4}.$$

Jest ona określona wzorem: $p_X(j) = P(X=j)$ dla $j \in \Omega_X$.

Definicja 9-12 [ROZKŁAD ZMIENNEJ LOSOWEJ] Funkcję p_X, która każdej wartości zmiennej losowej X w przestrzeni probabilistycznej (Ω, p) przypisuje prawdopodobieństwo, z jakim zmienna losowa X może tę wartość przyjąć, nazywamy *rozkładem tej zmiennej losowej.*

Uwaga: Zmienną losową rozważamy zawsze w pewnej przestrzeni probabilistycznej.

W zadaniu 9.38 na s. 171 mowa jest o zmiennej losowej, która każdemu wynikowi s-krotnego losowania bez zwracania kuli z urny $U_{1\to s}$ przypisuje liczbę skojarzeń. W przypadku $s = 3$ tę zmienną losową określono grafem strzałkowym na rysunku 142.

9.74. W salonie gier hazardowych oferuje się graczom następującą grę losową. Gracz (zapłaciwszy za udział w grze) dostaje prawo do dwukrotnego losowania bez zwracania kuli z urny $U_{3\to 2}$, w której są 3 kule białe i 2 czerwone. Za wynik tego doświadczenia losowego δ (opisano je na s. 157) gracz wygrywa tyle złotówek, ile wylosuje kul czerwonych. Wygrana gracza, tj. liczba czerwonych kul uzyskanych w opisanym doświadczeniu losowym (jeśli o niej mówić przed losowaniem kul), jest zmienną losową W. Określ jej rozkład.

□ Wygrana gracza jest zmienną losową W w przestrzeni probabilistycznej (Ω, p), gdzie Jest tu $\Omega = \{\mathsf{bb}, \mathsf{bc}, \mathsf{cb}, \mathsf{cc}\}$ oraz

$p(\mathsf{bb}) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$, $p(\mathsf{bc}) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$, $p(\mathsf{cb}) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$ i $p(\mathsf{cc}) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.

Tę przestrzeń prezentuje rysunek 133 na s. 157. Z rysunku 132*a* wynika, że jest ona modelem doświadczenia δ. Zmienna losowa W jest funkcją określoną następująco:

$$W(\mathsf{bb}) = 0, \quad W(\mathsf{bc}) = 1, \quad W(\mathsf{cb}) = 1, \quad W(\mathsf{cc}) = 2.$$

Wartości zmiennej losowej W tworzą zbiór $\Omega_W = \{0, 1, 2\}$. Mamy tu:

$\{W=0\} = \{\mathsf{bb}\}$, a zatem $P(W=0) = p(\mathsf{bb}) = \frac{3}{10}$,

$\{W=1\} = \{\mathsf{bc}, \mathsf{cb}\}$, a zatem $P(W=1) = p(\mathsf{bc}) + p(\mathsf{cb}) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10}$,

$\{W=2\} = \{\mathsf{cc}\}$, czyli $P(W=2) = p(\mathsf{cc}) = \frac{1}{10}$.

Rozkład zmiennej losowej W jest funkcją p_W określoną na zbiorze Ω_W i

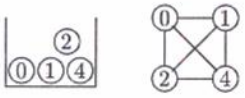
$$p_W(0) = \frac{3}{10}, \quad p_W(1) = \frac{6}{10} \quad \text{i} \quad p_W(2) = \frac{1}{10}.$$

Funkcję p_W przedstawmy w tabeli:

p_W :

$j \in \Omega_W$	0	1	2
$P(W=j)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

9.75. W urnie U są cztery kule oznaczone liczbami 0, 1, 2 i 4 (zob. rysunek 151). Liczba na kuli wylosowanej z tej urny jest wylosowaną liczbą. Równoczesne losowanie dwu kul z tej urny jest doświadczeniem losowym. Określ jego model probabilistyczny. Przypiszmy każdemu wynikowi tego losowania sumę liczb na wylosowanych kulach. Określ rozkład takiej zmiennej losowej X.



Rys. 151 Urna z kulami w roli kostki do gry

Wynik losowania jest dwuelementową kombinacją zbioru $\{0, 1, 2, 4\}$. Na rysunku 151 każdy wynik prezentuje odcinek łączący dwie wylosowane kule. Wszystkie wyniki są jednakowo prawdopodobne i jest ich 6. Zmienna losowa X jest funkcją różnowartościową i $\Omega_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, a zatem

$$P(X=1) = P(X=2) = P(X=3) = P(X=4) = P(X=5) = P(X=6) = \frac{1}{6}.$$

9.76. Rysunek 151 i powyższe fakty podsuwają pomysł, jak z urny z czterema kulami „zrobić" kostkę do gry. Opisz, jak za pomocą urny U symulować rzut kostką.

9.11. Czas trwania doświadczenia o losowej liczbie etapów

W rachunku prawdopodobieństwa zakłada się, że kolejne etapy doświadczenia przebiegającego etapami są przeprowadzane w kolejnych jednostkach czasu. Wśród doświadczeń losowych przebiegających etapami są takie, których liczba etapów zależy od przypadku. Są to zatem *doświadczenia losowe o losowej liczbie etapów*. Czas trwania doświadczenia o losowej liczbie etapów (odmierzany liczbą etapów) jest zmienną losową, którą oznaczamy przez T (z ewentualnym wskaźnikiem).

9.77. W zadaniu 9.17 mowa jest o losowaniu bez zwracania kuli z urny U_{5*1} tak długo, aż zostanie wylosowana kula czerwona. Liczba wylosowanych kul w takim doświadczeniu losowym jest czasem jego trwania. Określ rozkład tej zmiennej losowej T.

Z rozwiązania zadania 9.17 (por. rysunek 214 na s. 274) wynika, że zmienna losowa T jest określona w przestrzeni probabilistycznej (Ω, p), gdzie

$$\Omega = \{\mathsf{c}, \mathsf{bc}, \mathsf{bbc}, \mathsf{bbbc}, \mathsf{bbbbc}, \mathsf{bbbbbc}\} \text{ oraz}$$
$$p(\mathsf{c}) = p(\mathsf{bc}) = p(\mathsf{bbc}) = p(\mathsf{bbbc}) = p(\mathsf{bbbbc}) = p(\mathsf{bbbbbc}) = \tfrac{1}{6}.$$

Zmienna losowa T jest funkcją określoną na zbiorze Ω następująco:

$\omega \in \Omega$:	c	bc	bbc	bbbc	bbbbc	bbbbbc
$T(\omega)$:	1	2	3	4	5	6

.

Jest to funkcja różnowartościowa, a zatem

$$P(T{=}1) = P(T{=}2) = P(T{=}3) = P(T{=}4) = P(T{=}5) = P(T{=}6) = \tfrac{1}{6}.$$

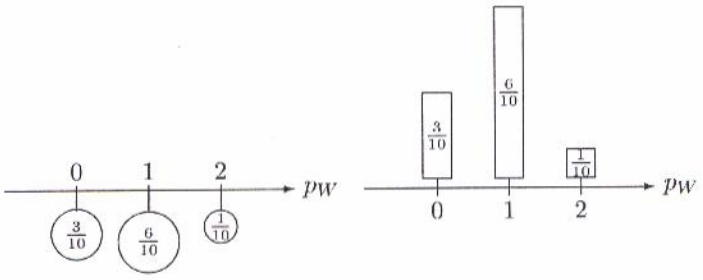
9.78. Z urny, w której są trzy kule białe i dwie czerwone, będzie losowana bez zwracania kula tak długo, aż zostanie wylosowana kula czerwona. Liczba wylosowanych kul w takim doświadczeniu losowym jest czasem jego trwania. Określ rozkład tej zmiennej losowej T.

9.79. Rzut monetą będzie powtórzony tak długo, aż wypadnie reszka, ale nie więcej niż 5 razy (jeśli w żadnym z pięciu rzutów nie wypadnie reszka, to doświadczenie się kończy). Niech T będzie liczbą rzutów monetą wykonanych w takim doświadczeniu losowym. Mowa tu o zmiennej losowej, która jest czasem trwania pewnego doświadczenia losowego o losowej liczbie etapów. Określ rozkład zmiennej losowej T.

Model probabilistyczny tego (nie trwającego „dłużej" niż 5 rzutów monetą) czekania na reszkę określono w tabeli na s. 159.

9.12. Fizyczna interpretacja rozkładu zmiennej losowej

Prawdopodobieństwo, z jakim zmienna losowa X przyjmuje wartość a, tj. liczbę $P(X{=}a)$, interpretujmy jako masę skupioną na osi liczbowej w punkcie a. Funkcja p_X jest w tej *fizycznej interpretacji* rozkładem jednostkowej masy w pewnych punktach na prostej. Dwie graficzne prezentacje tego fizycznego ujęcia rozkładu zmiennej losowej W, o której mowa w zadaniu 9.74, przedstawiono na rysunku 152.



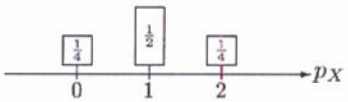
Rys. 152 Rozkład zmiennej losowej W jako rozkład jednostkowej masy na osi liczbowej

Rodzi się tu pytanie: W którym punkcie należy podeprzeć oś liczbową z rozmieszczonymi w jej punktach masami, aby ten układ mas był w równowadze? Pytanie dotyczy środka ciężkości układu mas.

Niech p_X będzie rozkładem pewnej zmiennej losowej X a Ω_X zbiorem jej wartości. Rozważmy funkcję p_X w interpretacji fizycznej. Punkt a na osi liczbowej nazywamy *środkiem symetrii rozkładu* p_X, jeśli:
— punkt a jest środkiem symetrii zbioru Ω_X, którego elementy są przedstawione jako punkty osi liczbowej oraz
— $p_X(a-x) = p_X(a+x)$ dla każdego $x \in \Omega_X$.

[ROZKŁAD SYMETRYCZNY] Rozkład p_X zmiennej losowej X, który ma środek symetrii, nazywamy *rozkładem symetrycznym*.

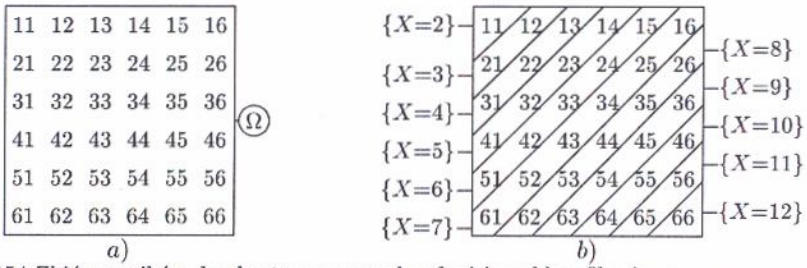
Rysunek 153 prezentuje (w interpretacji fizycznej) rozkład zmiennej losowej X, która wynikowi dwukrotnego rzutu monetą, przypisuje liczbę wyrzuconych reszek. O tej zmiennej losowej mowa jest w zadaniu 9.73 na s. 181.



Rys. 153 Rozkład liczby reszek w dwukrotnym rzucie monetą w interpretacji fizycznej

Rozkład p_X jest symetryczny. Punkt $a = 1$ jest środkiem symetrii funkcji p_X.

Kodujmy wyniki dwukrotnego rzutu kostką zgodnie z umową przyjętą na s. 163. Zbiór wyników dwukrotnego rzutu kostką prezentuje rysunek 154*a*).



Rys. 154 Zbiór wyników dwukrotnego rzutu kostką i jego klasyfikacja generowana przez zmienną losową X

9.80. Niech X będzie liczbą łącznie wyrzuconych oczek w dwukrotnym rzucie kostką. Określ rozkład tej zmiennej losowej X. Przedstaw rozkład p_X w interpretacji fizycznej.

Punkt $a = 7$ na osi liczbowej jest środkiem symetrii funkcji p_X, o której mowa w zadaniu 9.80. Rozkład p_X jest symetryczny.

9.81. Z urny $U_{1\to 6}$ (6 kul ponumerowanych od 1 do 6) będzie losowana kula:
a) dwa razy ze zwracaniem (doświadczenie losowe δ_1),
b) dwa razy bez zwracania (doświadczenie losowe δ_2).

Każdemu wynikowi doświadczenia losowego δ_j przypiszmy sumę numerów wylosowanych kul. W ten sposób zostają określone dwie zmiennej losowe: X – w przypadku doświadczenia δ_1 oraz Y – w przypadku doświadczenia losowego δ_2. Określ rozkład każdej z tych zmiennych losowych i przedstaw go jako rozkład jednostkowej masy na osi liczbowej.

□ Rysunek 154 przedstawia rozwiązanie zadania w przypadku doświadczenia losowego δ_1. Jest tak, bo dwukrotne losowanie ze zwracaniem kuli z urny $U_{1\to 6}$ można symulować dwukrotnym rzutem kostką. Numer kuli wylosowanej za j-tym razem można interpretować jako liczbę oczek wyrzuconych w j-tym rzucie kostką ($j = 1, 2$). Rozkład zmiennej losowej X ma środek symetrii w punkcie 7 na osi liczbowej.

Wartości zmiennej losowej Y tworzą zbiór $\Omega_Y = \{3, 4, \ldots, 11\}$. Wykażemy, że rozkład zmiennej losowej Y także ma środek symetrii w punkcie 7.

12	13	14	15	16
21	23	24	25	26
31	32	34	35	36
41	42	43	45	46
51	52	53	54	56
61	62	63	64	65

a)

Ω

3	4	5	6	7
3	5	6	7	8
4	5	7	8	9
5	6	7	9	10
6	7	8	9	11
7	8	9	10	11

b)

Rys. 155 Pewien sposób określenia zmiennej losowej Y jako funkcji

Rysunek 155*a* przedstawia klasyczną przestrzeń probabilistyczną (Ω, p) w interpretacji geometrycznej. Jest ona modelem doświadczenia losowego δ_2 (dlaczego?). Tabela na rysunku 155*b* powstała z rysunku 155*a* tak, że na miejscu wyniku doświadczenia δ_2 wpisano wartość zmiennej losowej Y dla tego wyniku. Z tego rysunku wynika, że:

$$P(Y{=}3) = \tfrac{2}{30} = \tfrac{1}{15},\quad P(Y{=}4) = \tfrac{2}{30} = \tfrac{1}{15},\quad P(Y{=}5) = \tfrac{4}{30} = \tfrac{2}{15},$$
$$P(Y{=}6) = \tfrac{4}{30} = \tfrac{2}{15},\quad P(Y{=}7) = \tfrac{6}{30} = \tfrac{1}{5},\quad P(Y{=}8) = \tfrac{4}{30} = \tfrac{2}{15},$$
$$P(Y{=}9) = \tfrac{4}{30} = \tfrac{2}{15},\quad P(Y{=}10) = \tfrac{2}{30} = \tfrac{1}{15},\quad P(Y{=}11) = \tfrac{2}{30} = \tfrac{1}{15},$$

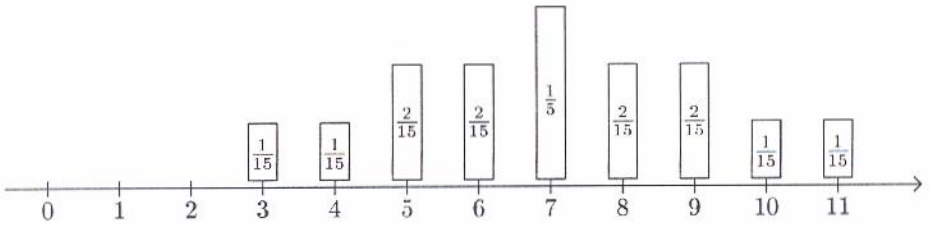
a zatem rozkład zmiennej losowej Y jest następującą funkcją:

p_Y:

$k \in \Omega_Y$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$P(Y{=}k)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$

.

Z interpretacji fizycznej funkcji p_Y (zob. rysunek 156) wynika, że liczba 7 jest środkiem symetrii rozkładu zmiennej losowej Y.



Rys. 156 Rozkład zmiennej losowej Y w interpretacji fizycznej

9.82. Po potasowaniu trzech kart: waleta J, damy Q i króla K, karty zostaną rozłożone w rzędzie. Zanim to nastąpi gracz stawia na wynik tego doświadczenia losowego, a więc typuje, jaka karta znajdzie się na pierwszym, jaka na drugim a jak na trzecim miejscu. Po rozłożeniu kart gracz wygrywa tyle złotówek, na ilu miejscach trafnie przewidział kartę. O tej grze mowa jest w zadaniu 9.39 (tam gracz zdobywał punkty, teraz wygrywa złotówki). Wygrana gracza, jeśli o niej mówić po wypełnieniu kuponu, ale przed tasowaniem i rozkładaniem kart[15] jest zmienną losową. Załóżmy, że gracz postawił na wynik QJK. Jego wygrana jest zmienną losową Y. Określ jej rozkład i przedstaw go w interpretacji fizycznej.

Przestrzeń probabilistyczną (Ω, p) jako model rozkładania w rzędzie trzech kart prezentuje rysunek 142. Na tym rysunku określono także grafem strzałkowym zmienną losową Y jako funkcję ze zbioru Ω na zbiór $\Omega_Y = \{0, 1, 3\}$. Rozkład zmiennej losowej Y jest funkcją p_Y określoną na zbiorze $\Omega_Y = \{0, 1, 3\}$ następująco:

p_Y:

$j \in \Omega_Y$:	0	1	3
$P(Y=j)$:	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

9.13. Zmienna losowa wokół nas

Zmienna losowa jest pojęciem matematycznym. Ale pojawiło się ono w rachunku prawdopodobieństwa dzięki temu, że w rzeczywistości, która nas otacza, spotyka się funkcje, które wynikom doświadczenia losowego przypisują liczby rzeczywiste, przy czym znamy model tego doświadczenia.

1. [LICZBA WYSTAWIONYCH PALCÓW W „MARYNARZU"] Przy losowaniu jednej z grona s osób metodą marynarza (opisano ją na s. 173) każda z osób na znak ukazuje pewną (ustaloną *na chybił trafił*) liczbę palców prawej ręki. Z każdym wynikiem tego doświadczenia losowego kojarzona jest następnie liczba łącznie wystawionych palców, a więc liczba ze zbioru $\{s, s+1, s+2, \ldots, 5s\}$. Ta liczba, jeśli o niej mówić zanim się zacznie wystawianie palców, jest zmienną losową.

2. [DZIEŃ URODZIN PRZYPADKOWO SPOTKANEJ OSOBY] Każdego spotkanego przypadkiem człowieka możemy pytać o dzień, w którym obchodzi urodziny. Ponumerujmy dni roku liczbami od 1 do 365. W ten sposób wynikowi pewnego doświadczenia losowego zostaje przypisana liczba od 1 do 365.

3. [LICZBA BABEK BEZ RODZYNKÓW] Jeśli do ciasta wsypiemy n rodzynków, ciasto dokładnie wymieszamy i podzielimy na s równych części, z każdej formując babkę, to o tym, ile rodzynków trafi do każdej z babek, decyduje przypadek. Jeśli o liczbie babek bez rodzynków mówić przed dzieleniem ciasta, to jest ona zmienną losową. W jakiej przestrzeni probabilistycznej należy ją rozpatrywać, gdy np. $n = s = 6$?

4. [LICZBA RODZYNKÓW W KUPOWANEJ BABCE] W piekarni sprzedaje się s babek, które powstały z ciasta, do którego dodano n rodzynków. Jesteś pierwszym klientem. Liczba rodzynków w babce, którą za chwilę kupisz, jest liczbą przypisaną wynikowi pewnego doświadczenia losowego, a więc zmienną losową (w jakiej przestrzeni probabilistycznej należy ją rozpatrywać?).

[15] Zwróć uwagę, jak ważny jest w rachunku prawdopodobieństwa czas

5. [LICZBA OCZEK WYRZUCONYCH TRZEMA KOSTKAMI] W licznych grach znanych z historii rzuca się trzema kostkami (rys. 160 oraz rys. 49 na s. 64). Każdemu wynikowi tego doświadczenia losowego przypisuje się sumę liczb wyrzuconych oczek. Jeśli o tej sumie mówimy przed rzutem, to mamy do czynienia ze zmienną losową.

6. [LICZBA KUREK, KTÓRE WYSIEDZI KWOKA] Kwoka siedzi na s jajkach. Liczba kurek, które wyklują się z tych jajek, jest zmienną losową. Możemy uznać, że wyklucie się kurki jest tak samo prawdopodobne jak kogutka. Wysiadywanie przez kwokę s jaj ma swój model probabilistyczny.

7. [LICZBA PECHOWYCH PYTAŃ] Student miał przygotować odpowiedzi na s pytań, ale na c pytań nie zdążył się przygotować ($1 < c < s$). Egzaminator zadaje studentowi k pytań. Liczba pytań, na które ten student nie zna odpowiedzi, wśród k otrzymanych na egzaminie, jest (przed wejściem studenta do sali) zmienną losową. Z probabilistycznego punktu widzenia, jest ona liczbą czerwonych kul wśród k kul wylosowanych (za chwilę) z urny U_{b*c}, gdzie $b = s - c$.

8. [LICZBA WYCIĄGNIĘTYCH ZAPAŁEK] Wróćmy do losowania za pomocą zapałek jednej z grona s osób, opisanego na s. 130. Wyciąganie zapałek kończy się w momencie, gdy ktoś trafi na zapałkę bez główki. Liczba zapałek, które zostaną wyciągnięte w takim losowaniu, jest zmienną losową. Jest ona czasem trwania tego losowania.

9. [LICZBA ASÓW W RĘKU] Liczba asów, które dostanie ustalony gracz przy rozdawaniu kart czterem graczom w bridża, jest zmienną losową, która wynikowi losowania 13 kart z talii 52 kart, przypisuje liczbę od 0 do 4.

11. [WYGRANA W HAZARDOWEJ GRZE LOSOWEJ] W niektórych grach losowych przeprowadza się doświadczenie losowe a wygrana gracza zależy od wyniku tego doświadczenia. Tak jest w grze typu *jednoręki bandyta*, w grze *w ruletę* itd. Ta wygrana jest zmienną losową, która każdemu wynikowi wspomnianego doświadczenia przypisuje liczbę (punktów, żetonów, dolarów).

9.14. Suma i iloczyn zmiennych losowych

Definicja 9-13 [SUMA I ILOCZYN ZMIENNYCH LOSOWYCH] Jeśli X_1 i X_2 są zmiennymi losowymi w przestrzeni probabilistycznej (Ω, p), to:
— funkcja X określona wzorem: $X(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega)$ dla każdego $\omega \in \Omega$, a więc funkcja $X = X_1 + X_2$, jest nową zmienną losową w tej przestrzeni, nazywamy ją *sumą zmiennych losowych* X_1 *i* X_2;
— funkcja Y określona wzorem: $Y(\omega) = X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$ dla każdego $\omega \in \Omega$, a więc funkcja $X = X_1 \cdot X_2$, jest nową zmienną losową w tej przestrzeni, nazywamy ją *iloczynem zmiennych losowych* X_1 *i* X_2.

Analogicznie określa się sumę i iloczyn n zmiennych losowych w tej samej przestrzeni probabilistycznej.

■ Za chwilę rzucisz dwa razy monetą. Liczba uzyskanych reszek jest w tym momencie zmienną losową X (por. zadanie 9.73 na s. 181 oraz rysunek 150). Jej wartościami są liczby 0, 1 i 2. Niech X_j oznacza liczbę reszek uzyskanych w j-tym rzucie ($j = 1, 2$). Zmienne losowe X_1 i X_2 przyjmują dwie wartości: 0 i 1. Dla każdego wyniku ω dwukrotnego rzutu monetą jest $X(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega)$, a więc $X = X_1 + X_2$. Zmienna losowa X jest sumą zmiennych losowych X_1 i X_2.

9.83. Niech X będzie liczbą orłów, Y zaś – liczbą reszek wyrzuconych w pojedynczym rzucie monetą, który dopiero nastąpi. Mowa zatem o dwu zmiennych losowych w tej samej przestrzeni probabilistycznej. Określ rozkłady zmiennych losowych: $X+Y$ oraz $X \cdot Y$.

□ Zmienne losowe $X, Y, X+Y$ oraz $X \cdot Y$ jako funkcje ze zbioru $\Omega = \{o, r\}$ w zbiór liczb rzeczywistych, są określone w tabeli na rysunku 157. Zmienne losowe $X+Y$ i $X \cdot Y$ są funkcjami stałymi. Każda z nich przyjmuje tylko jedną wartość i to z prawdopodobieństwem równym 1. Jeśli rozkład takiej zmiennej losowej rozważać w interpretacji fizycznej, to całkowita jednostkowa masa jest skupiona na osi w jednym punkcie. Taki rozkład nazywamy *rozkładem jednopunktowym.*

$\omega \in \Omega$	o	r
$X(\omega)$:	1	0
$Y(\omega)$:	0	1
$(X+Y)(\omega)$:	1	1
$(X \cdot Y)(\omega)$:	0	0

Rys. 157 Zmienne losowe $X+Y$ i $X \cdot Y$ jako funkcje

9.84. Niech (Ω, p) będzie modelem probabilistycznym dwukrotnego rzutu kostką. Niech X_j będzie liczbą oczek wyrzuconych w j-tym rzucie kostką ($j = 1, 2$). Przez X oznaczmy sumę, a przez Y – iloczyn liczb oczek wyrzuconych w tym doświadczeniu losowym. Określ rozkład zmiennych losowych X_1, X_2, X i Y.

9.15. Zmienna losowa i nowa przestrzeń probabilistyczna

Niech $\Omega_X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_t\}$ będzie zbiorem wartości zmiennej losowej X w przestrzeni probabilistycznej (Ω, p). Zdarzenia $\{X{=}x_1\}$, $\{X{=}x_2\}$, $\{X{=}x_3\}, \ldots, \{X{=}x_t\}$ tworzą układ zupełny zdarzeń, są bowiem parami rozłączne i ich suma jest zbiorem Ω. Zmienna losowa, która przyjmuje co najmniej dwie wartości, generuje zatem pewien układ zupełny zdarzeń.

9.85. Za chwilę rzucimy trzy razy monetą. Liczba wyrzuconych reszek jest w tej sytuacji zmienną losową X. W modelu tego doświadczenia przedstaw zdarzenia: $\{X{=}0\}$, $\{X{=}1\}$, $\{X{=}2\}$, $\{X{=}3\}$ i oblicz ich prawdopodobieństwa. Określ rozkład zmiennej losowej X oraz przedstaw go w interpretacji fizycznej.

□ Modelem trzykrotnego rzutu monetą jest para (Ω, p), gdzie

$$\Omega = \{ooo, oor, oro, orr, roo, ror, rro, rrr\} \quad \text{i} \quad p(\omega) = \tfrac{1}{8} \text{ dla każdego } \omega \in \Omega.$$

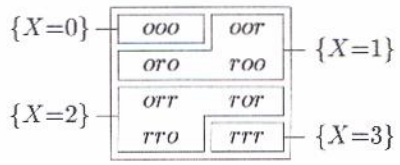
Liczba wyrzuconych reszek jest następującą funkcją:

X :

ω:	ooo	oor	oro	orr	roo	ror	rro	rrr
$X(\omega)$:	0	1	1	2	1	2	2	3

.

Rysunek 158 ukazuje, jak zmienna losowa X klasyfikuje zbiór wyników trzykrotnego rzutu monetą. Jest tu $\Omega_X = \{0, 1, 2, 3\}$. Zdarzenia $\{X{=}0\}$, $\{X{=}1\}$, $\{X{=}2\}$ i $\{X{=}3\}$ tworzą układ zupełny zdarzeń. Dlaczego rysunki: 158 i 136 (s. 162) są tak do siebie podobne?



Rys. 158 Układ zupełny zdarzeń powstały dzięki zmiennej losowej X

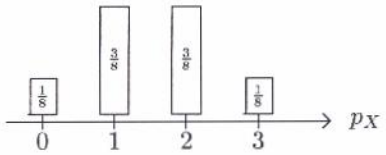
Z twierdzenia klasycznego wynika, że

$$P(X=0)=\tfrac{1}{8},\quad P(X=1)=\tfrac{3}{8},\quad P(X=2)=\tfrac{3}{8},\quad P(X=3)=\tfrac{1}{8},$$

a zatem rozkład zmiennej losowej X jest funkcją p_X określoną następująco:

$$p_X:\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline j\in\Omega_X & 0 & 1 & 2 & 3\\ \hline p_X(j) & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8}\\ \hline\end{array}.$$

Rozkład p_X zmiennej losowej X, która jest liczbą reszek w trzykrotnym rzucie monetą jest symetryczny (zob. rysunek 159). Środkiem symetrii jest punkt $\frac{3}{2}$ na osi liczbowej.



Rys. 159 Rozkład zmiennej losowej X w interpretacji fizycznej

Funkcja p_X jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze $\Omega_X=\{0,1,2\}$. Para (Ω_X, p_X) jest więc nową przestrzenią probabilistyczną, powstałą dzięki zmiennej losowej X.

Rodzi się pytanie, co ma wspólnego ta nowa przestrzeń probabilistyczna z klasyczną przestrzenią (Ω, p), która była na początku modelem trzykrotnego rzutu monetą. Na początku interesowało nas co wypada w kolejnym rzucie monetą. Gdy pojawiła się zmienna losowa X, obiektem zainteresowania stała się liczba wyrzuconych reszek, przestało być ważne, w których rzutach te reszki wypadają. Zmienna losowa X doprowadziła do nowego modelu trzykrotnego rzutu monetą. Ta zmienna losowa przeprowadziła model probabilistyczny (Ω, p) w nowy model (Ω_X, p_X).

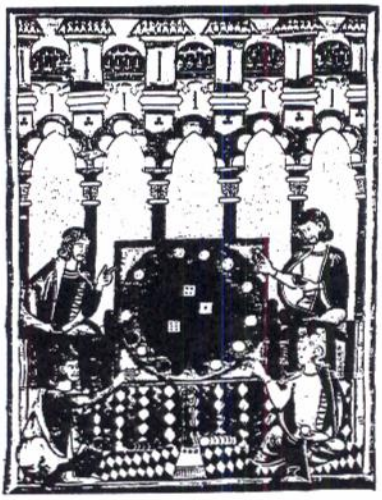
Z powyższych rozważań wynika, że dzięki zmiennej losowej w danej przestrzeni probabilistycznej powstaje nowa przestrzeń probabilistyczna.

Jeśli X jest zmienną losową w przestrzeni probabilistycznej (Ω, p), Ω_X jest zbiorem jej wartości, p_X zaś jest jej rozkładem, to para (Ω_X, p_X) jest nową przestrzenią probabilistyczną. Nazywamy ją *przestrzenią probabilistyczną generowaną na prostej przez zmienną losową* X.

Elementy zbioru Ω_X są liczbami, a te możemy interpretować jako punkty na osi liczbowej. To tłumaczy nazwę „przestrzeń generowana na prostej".

9.86. W zadaniu 9.37 mowa jest o funkcji V, która wynikowi (x, y) dwukrotnego rzutu kostką przypisuje iloczyn $x \cdot y$. Jest ona zmienną losową V. Korzystając z rysunku 141*c*)

określ jej rozkład. Określ układ zupełny zdarzeń jaki w przestrzeni probabilistycznej (Ω, p) (będącej modelem dwukrotnego rzutu kostką) generuje zmienna losowa V.



Rys. 160 Gra w trzy kości w średniowiecznej Hiszpanii, miniatura z rękopisu o grach króla Kastylii Alfonsa X. Mądrego (r. 1283)

9.16. Wartość oczekiwana zmiennej losowej

Definicja 9-14 [WARTOŚĆ OCZEKIWANA] Jeśli zmienna losowa X w przestrzeni probabilistycznej (Ω, p) przyjmuje wartości $x_1, x_2, ..., x_t$ i wartość x_j przyjmuje z prawdopodobieństwem $P(X{=}x_j)$ dla $j = 1, 2, ..., t$, to sumę

$$x_1 \cdot P(X{=}x_1) + x_2 \cdot P(X{=}x_2) + \cdots + x_t \cdot P(X{=}x_t),$$

nazywamy *wartością oczekiwaną*, albo *wartością średnią*, albo *nadzieją matematyczną zmiennej losowej* X i oznaczamy przez $E(X)$.

9.87. Korzystając z definicji oblicz wartość oczekiwaną zmiennej losowej X, która jest liczbą reszek wyrzuconych: a) w dwukrotnym, b) w trzykrotnym rzucie monetą.

□ W przypadku dwukrotnego rzutu monetą mamy:

$$E(X) = 0 \cdot P(X{=}0) + 1 \cdot P(X{=}1) + 2 \cdot P(X{=}2) = 0 \cdot \tfrac{1}{4} + 1 \cdot \tfrac{1}{2} + 2 \cdot \tfrac{1}{4} = 1.$$

□ W przypadku trzykrotnego rzutu monetą jest:

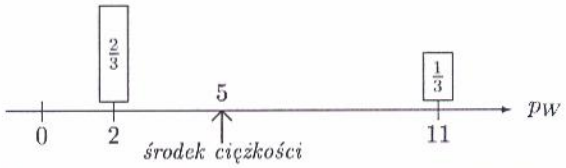
$$E(X) = 0 \cdot P(X{=}0) + 1 \cdot P(X{=}1) + 2 \cdot P(X{=}2) + 3 \cdot P(X{=}3) = 0 \cdot \tfrac{1}{8} + 1 \cdot \tfrac{3}{8} + 2 \cdot \tfrac{3}{8} + 3 \cdot \tfrac{1}{8} = \tfrac{3}{2} = 1,5.$$

9.17. Nadzieja matematyczna w interpretacji fizycznej rozkładu

Załóżmy, że zbiór Ω_X wartości zmiennej losowej X jest skończony. Interpretujmy jej rozkład p_X jako rozkład jednostkowej masy na osi liczbowej. Liczba $E(X)$ jest współrzędną punktu, który w fizyce nazywa się *środkiem ciężkości* tego układu mas.

Gdyby oś liczbową podeprzeć w punkcie o współrzędnej $E(X)$, to wspomniany układ mas byłby w równowadze. Wartości oczekiwanej nadaliśmy pewien „fizyczny sens".

9.88. W grze losowej gracz losuje dwie kule z urny, w której jest 5 kul białych i jedna czerwona. Za każdą wylosowaną kulę gracz wygrywa 1 zł, za wylosowaną kulę czerwoną zaś 10 zł. Określ rozkład zmiennej losowej W, która wynikowi losowania przypisuje wygraną kwotę. Przedstaw ten rozkład jako rozkład jednostkowej masy na osi liczbowej. Oblicz $E(W)$, a więc wyznacz środek ciężkości tego układu mas.



Rys. 161 Rozkład zmiennej losowej W jako rozkład jednostkowej masy na osi

□ Rozkład zmiennej losowej W, o której mowa w zadaniu 9.88, przedstawiono na rysunku 161. Jednostkowa masa jest rozłożona na osi liczbowej w dwu punktach: 2 i 11. Środkiem ciężkości tego układu mas jest punkt o współrzędnej 5.

Z fizycznej interpretacji rozkładu zmiennej losowej i jej wartości oczekiwanej wynika, że:

> jeśli rozkład zmiennej losowej ma środek symetrii, to jest on równocześnie środkiem ciężkości, a więc wartością oczekiwaną.

■ Rozkład p_X zmiennej losowej X, która jest liczbą reszek w trzykrotnym rzucie monetą, jest symetryczny (por. rysunek 158 na s. 188). Środkiem symetrii jest środek odcinka $[0,3]$, czyli liczba $\frac{0+3}{2}$, a zatem $E(X) = \frac{3}{2} = 1,5$.

■ Łączna liczba oczek wyrzuconych dwiema kostkami jest zmienną losową X, której rozkład ma środek symetrii. Jest nim środek odcinka $[2,12]$, czyli liczba 7, a zatem $E(X) = 7$.

9.89. Korzystając z symetrii, znajdź średnią liczbę oczek wyrzuconych trzema kostkami do gry. Znajdź średnią liczbę oczek w rzucie pięcioma kostkami.

9.18. Wartość oczekiwana a prosperowanie hazardu

9.90. Gracz będzie losował dwie kule z urny U_{3*2} i za każdą wylosowaną kulę białą wygra 1 zł, za kulę czerwoną zaś 5 zł. Za udział w takiej grze gracz musi zapłacić. To jest oczywiste. Przy jakiej opłacie za udział w takiej grze bankier może oczekiwać zysków?

□ Wygrana gracza w opisanej hazardowej grze losowej jest zmienną losową W w modelu probabilistycznym losowania dwu kul z urny U_{3*2}. Ten model jest przestrzenią probabilistyczną (Ω, p), gdzie

$$\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2\} \text{ oraz } p(\omega_0) = \tfrac{3}{10},\ \ p(\omega_1) = \tfrac{6}{10},\ \ p(\omega_2) = \tfrac{1}{10},$$

i gdzie ω_j oznacza wynik: `wśród dwu wylosowanych kul jest` j `czerwonych` ($j = 0, 1, 2$). Tę przestrzeń określiliśmy na s. 155.

Przed losowaniem kul wygrana gracza jest funkcją określoną na zbiorze Ω następująco

$$W(\omega_0) = 2, \quad W(\omega_1) = 3, \quad W(\omega_2) = 4.$$

Rozkład zmiennej losowej W jest funkcją p_W określoną na zbiorze $\Omega_W = \{2, 3, 4\}$ następująco:

p_W:

$k \in \Omega_W$:	2	3	4
$P(W=k)$:	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

.

Niech x oznacza opłatę za udział w jednej grze. Załóżmy, że gracz zagra n razy i to n jest stosunkowo duże. Niech $n = 100$. Przeanalizujmy, jakiej wygranej może oczekiwać gracz, a jakich zysków może oczekiwać bankier w tej sytuacji. Prawdopodobieństwo wygrania 4 zł jest równe $\frac{1}{10}$, a zatem w stu grach można oczekwiać 10 gier zakończonych wygraną 4 zł. Gracz może oczekiwać 60 gier zakończonych wygraną 3 zł oraz 30 gier zakończonych wygraną 2 zł. Oczekiwana wygrana gracza w stu grach jest zatem kwotą $30 \cdot 2 + 60 \cdot 3 + 10 \cdot 40$, a zatem iloraz

$$\frac{30 \cdot 2 + 60 \cdot 3 + 10 \cdot 4}{100}$$

jest *oczekiwaną wygraną gracza w jednej grze*. Zauważ, że

$$\frac{30 \cdot 2 + 60 \cdot 3 + 10 \cdot 4}{100} = 2 \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot \frac{6}{10} + 4 \cdot \frac{1}{10} = \frac{28}{10} = 2 \cdot P(W=2) + 3 \cdot P(W=3) + 4 \cdot P(W=4).$$

Znaleziona tu liczba $\frac{28}{10}$ jest wartością oczekiwaną zmiennej losowej W.

Wróćmy do bankiera. Za udział w stu grach gracz zapłaci bankierowi $100 \cdot x$ zł. Kwota $30 \cdot 2 + 60 \cdot 3 + 10 \cdot 4$, tj. oczekiwana wygrana gracza w stu grach, jest dla bankiera jego oczekiwaną stratą. Bankier może oczekiwać zysków, jeśli

$$100 \cdot x > 30 \cdot 2 + 60 \cdot 3 + 10 \cdot 4,$$

a więc gdy

$$x > \frac{30 \cdot 2 + 60 \cdot 3 + 10 \cdot 4}{100} = \frac{280}{100} = E(W).$$

Hazard będzie prosperował, jeśli za udział w grze bankier będzie pobierał od gracza więcej niż 2 zł 80 gr, tj. więcej niż wynosi wartość oczekiwana wygranej gracza w tej grze. Załóżmy, że opłata za wejście do gry będzie równa 3 zł. Wówczas oczekiwany zysk bankiera z jednej gry będzie równy 20 gr. Jeśli gracz zagra 100 razy, lub – co na jedno wychodzi – w grze weźmie udział stu graczy, to oczekiwany zysk bankiera wynosi $100 \cdot 20$, czyli 20 zł. Te fakty tłumaczą, dlaczego przy takiej opłacie za wejście do gry, bankier może liczyć na zyski.

Gdyby bankier pobierał opłatę 2 zł 80 gr za udział w grze (tj. tyle, ile wynosi wartość oczekiwana wygranej gracza w jednej grze), jego oczekiwany zysk byłby równy 0. W tej sytuacji opisaną hazardową grę losową nazwiemy *sprawiedlią*.

9.91. Za wynik dwukrotnego rzutu kostką gracz wygrywa tyle złotówek, ile łącznie wypadnie oczek. Bankier pobiera za udział w tej grze 8 zł. Czy bankier może liczyć na zyski? Jakich zysków może on oczekiwać, gdy w tę grę zagra w jego salonie 360 graczy?

9.92. Za wynik trzykrotnego rzutu monetą gracz wygrywa tyle złotówek, ile wyrzuci reszek. Przy jakiej opłacie za udział w tej grze jest ona sprawiedliwa?

9.93. W zadaniu 9.82 opisano hazardową grę losową. Wygrana gracza jest zmienną losową Y. Załóżmy, że za udział w grze gracz płaci 1 zł 50 gr. Czy bankier może liczyć na zyski z takiego hazardu? Jakich zysków może on oczekiwać od stu graczy?

9.94. Wróćmy do hazardowej gry losowej opisanej w zadaniu 9.74. Przy jakiej opłacie za wejście do tej gry jest ona sprawiedliwa?

9.19. Własności wartości oczekiwanej

Udowodnij następujące twierdzenie:

Twierdzenie 9-4 *Jeśli X jest zmienną losową w przestrzeni probabilistycznej (Ω, p) i c jest ustaloną liczbą rzeczywistą, to $E(cX) = cE(X)$ i $E(X + c) = E(X) + c$.*

9.95. Rysunek 162 przedstawia urnę U. Liczba na kuli wylosowanej z tej urny jest wylosowaną liczbą. Rozważmy dwa doświadczenia losowe:
δ_a: dwukrotne losowanie ze zwracaniem kuli z urny U,
δ_b: dwukrotne losowanie bez zwracania kuli z urny U.
Niech X będzie sumą liczb wylosowanych w doświadczeniu δ_a, Y zaś – sumą liczb wylosowanych w doświadczeniu δ_b.
a) W odpowiednich przestrzeniach probabilistycznych określ rozkłady zmiennych losowych X i Y. Oblicz $E(X)$ i $E(Y)$.
b) Niech X_j oznacza liczbę wylosowaną za j-tym razem w doświadczeniu δ_a, Y_j zaś liczbę wylosowaną za j-tym razem w doświadczeniu δ_b, $j = 1, 2$. Wykaż, że

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) \text{ oraz } E(Y) = E(Y_1) + E(Y_2).$$

Zauważ, że $X = X_1 + X_2$ i $Y = Y_1 + Y_2$.



Rys. 162 Urna U do losowania liczby

Twierdzenie 9-5 *Jeśli X i Y są zmiennymi losowymi w tej samej przestrzeni probabilistycznej, to $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$, czyli wartość oczekiwana sumy zmiennych losowych jest równa sumie ich wartości oczekiwanych.*

Ostatnie twierdzenie pozostaje prawdziwe w przypadku sumy dowolnej, skończonej ilości zmiennych losowych określonych w tej samej przestrzeni probabilistycznej.

9.96. Korzystając z ostatniego twierdzenia znajdź wartość oczekiwaną sumy liczb oczek wyrzuconych w trzykrotnym rzucie kostką.

■ Liczba reszek w pojedynczym rzucie monetą jest zmienną losową X, która przyjmuje dwie wartości: 1 (gdy `wypadnie reszka`) i 0 (gdy `wypadnie orzeł`). Jest tu $P(X{=}1) = P(X{=}0) = \frac{1}{2}$, czyli $E(X) = 0 \cdot P(X{=}0) + 1 \cdot P(X{=}1) = P(X{=}1) = \frac{1}{2}$.

9.97. Korzystając z powyższych własności nadziei matematycznej (a więc nie odwołując się do definicji) znajdź wartość oczekiwaną liczby reszek w n-krotnym rzucie monetą.

Niech X będzie zmienną losową, dla której $\Omega_X = \{0, 1\}$. Jest wówczas

$$E(X) = 0 \cdot P(X{=}0) + 1 \cdot P(X{=}1) = P(X{=}1),$$

a zatem

jeśli zmienna losowa X przyjmuje tylko wartości 0 i 1, to $E(X) = P(X{=}1)$.

9.98. Czy są prawdziwe następujące dwie implikacje:
Jeśli X i Y są zmiennymi losowymi w tej samej przestrzeni probabilistycznej (Ω, p) i zbiory Ω_X i Ω_Y wartości tych zmiennych losowych są skończone, to:
a) $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$;
b) $E(X \cdot Y) \neq E(X) \cdot E(Y)$?
Odpowiedź uzasadnij. Skorzystaj z rozwiązania zadania 9.83 (zob. s. 188).

9.99. Rozważmy s-krotne losowanie bez zwracania kuli z urny $U_{1\to s}$. Mówimy o *skojarzeniu*, ilekroć numer kuli zgodzi się z numerem etapu, na którym ta kula została wylosowana (por. s. 171). Niech Z_s będzie liczbą skojarzeń w opisanym losowaniu. Jeśli o tej liczbie mówimy przed rozpoczęciem losowania, to Z_s jest zmienną losową. Oblicz jej wartość oczekiwaną.

□ Niech X_k oznacza liczbę skojarzeń na k-tym etapie s-krotnego losowania bez zwracania kuli z urny $U_{1\to s}$, gdzie $k = 1, 2, 3, \ldots, s$. Zauważ, że

$$Z_s = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_s.$$

Zmienna losowa Z_s jest sumą zmiennych losowych X_1, X_2, X_3,..., X_s).

Zmienna losowa X_k przyjmuje tylko wartości 0 i 1, zatem $E(X_k) = P(X_k = 1)$. Zdarzenie $\{X_k = 1\}$ zajdzie wtedy i tylko wtedy, gdy za k-tym razem zostanie wylosowana kula o numerze k, a więc gdy zajdzie zdarzenie B_k, o którym mowa w zadaniu 9.38 na s. 171. Z rozwiązania tego zadania wynika, że $P(B_k) = \frac{1}{s}$, niezależnie od s. Jest więc

$$E(X_k) = P(X_k = 1) = P(B_k) = \tfrac{1}{s} \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, 3, \ldots, s.$$

Z uogólnienia twierdzenia 9-5 wynika, że wartość oczekiwana sumy s zmiennych losowych jest sumą wartości oczekiwanych tych zmiennych losowych, a więc zachodzi równość

$$E(Z_s) = E(X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_s) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + \cdots + E(X_s) = s \cdot \tfrac{1}{s} = 1.$$

Wykazaliśmy tym samym, że średnia liczba skojarzeń w s-krotnym losowaniu bez zwracania kuli z urny $U_{1\to s}$ nie zależy od s i jest równa 1. Jest to bez wątpienia zaskakujący fakt.

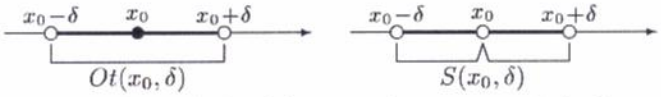


Rys. 163 Wynik rozkładania (w dwu rzędach) potasowanych kart treflowych i kierowych

10. Granica funkcji w punkcie i ciągłość funkcji

10.1. Punkt skupienia zbioru

Definicja 10-1 [SĄSIEDZTWO LICZBY NA OSI] Niech δ będzie dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią. Zbiór $(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$ nazywamy *sąsiedztwem liczby x_0 o promieniu δ* i oznaczamy $S(x_0,\delta)$. Jest więc $x\in S(x_0,\delta) \iff 0<|x-x_0|<\delta$.



Rys. 164 Otoczenie i sąsiedztwo punktu x_0 o promieniu δ

Sąsiedztwo liczby x_0 o promieniu δ otrzymujemy z otoczenia liczby x_0 o tym promieniu (por. rys. 164 oraz s. 106) usuwając z niego punkt x_0, czyli

$$S(x_0,\delta) = Ot(x_0,\delta)\setminus\{x_0\}.$$

Definicja 10-2 [PUNKT SKUPIENIA ZBIORU] Niech $A\subset\mathbb{R}$ (A jest więc zbiorem liczbowym). Liczbę x_0 nazywamy *punktem skupienia zbioru A* jeśli w każdym sąsiedztwie liczby x_0 znajduje się element zbioru A, czyli, gdy:

(1) $$\forall\delta>0\ [S(x_0,\delta)\cap A\neq\emptyset].$$

■ Niech $A=(0,1]$. Wykażemy, że liczba 0 jest punktem skupienia zbioru A. Niech δ będzie dowolną liczbą dodatnią. Jeśli $\delta\geqslant 1$, to liczba $\frac{1}{2}$ należy zarówno do zbioru A jak i do zbioru $S(0,\delta)$, a więc warunek (1) jest spełniony. Jeśli $0<\delta<1$, to liczba $\frac{\delta}{2}$ należy zarówno do zbioru A jak i do zbioru $S(0,\delta)$, a więc i dla takich δ warunek (1) jest spełniony. Warunek (1) jest zatem spełniony dla każdego $\delta>0$, a tym samym liczba 0 jest punktem skupienia zbioru $A=(0,1]$.
Zauważ, że $0\notin A$. Punkt skupienia zbioru nie musi należeć do tego zbioru.

10.1. Niech $A=(0,1]$. Udowodnij, że:
a) każdy element zbioru A jest punktem skupienia tego zbioru,
b) żadna liczba nie należąca do A i różna od 0, nie jest punktem skupienia zbioru A.

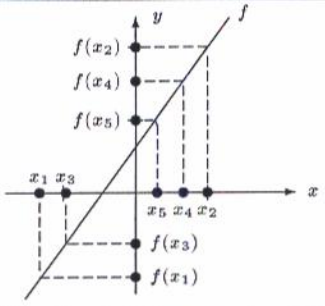
10.2. Niech $B=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots\}$. Udowodnij, że ten nieskończony (ale przeliczalny) zbiór B ma tylko jeden punkt skupienia i że jest nim liczba 0. Zauważ, że $0\notin B$.

10.3. Udowodnij, że zbiór $C=\{0,\frac{1}{2},\sqrt{13}\}$ nie posiada punktów skupienia. Niech C będzie dowolnym zbiorem skończonym. Udowodnij, że ten zbiór nie ma punktów skupienia.

Dalsze rozważania odnoszą się do funkcji liczbowo-liczbowej $f: X\longrightarrow Y$. Zbiór X, tj. dziedzinę funkcji f, oznaczamy dalej przez D_f.

Definicja 10-3 Jeśli (x_n) jest ciągiem, którego wyrazy są elementami zbioru D_f, to ciąg $(f(x_n))$ nazywamy *ciągiem wartości funkcji f odpowiadającym ciągowi (x_n)*.

■ Jeśli $f(x)=\frac{5x+1}{x^2}$ i $x_n=\frac{1}{n}$, to $f(x_n)=\frac{5\frac{1}{n}+1}{(\frac{1}{n})^2}=5n+n^2$. Jest $\lim\limits_{n\to\infty}(5n+n^2)=+\infty$.



Rys. 165 Ciąg $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ i odpowiadający mu ciąg $(f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots)$ na wykresie pewnej funkcji liniowej f

■ Niech $f(x) = |x| + 1$ oraz $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$. Oto kilka początkowych wyrazów ciągu $(f(x_n))$ wartości funkcji f odpowiadającego ciągowi (x_n):

n:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
x_n:	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{9}$	...
$f(x_n)$:	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	...

Ten ciąg jest określony wzorem $f(x_n) = |x_n| + 1 = |(-1)^n \frac{1}{n}| + 1 = \frac{1}{n} + 1 = \frac{n+1}{n}$.

10.4. Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{|x|}{x}$ jest zbiór $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
a) Wykaż, że liczba 0 jest punktem skupienia zbioru D_f,
b) Niech $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$. Określ ciąg $(f(x_n))$ wartości funkcji f odpowiadający temu ciągowi (x_n). Czy ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny w sensie węższym?
c) Niech $x_n^1 = -\frac{1}{n}$ oraz $x_n^2 = \frac{1}{n}$. Znajdź ciągi $f(x_n^1))$ i $(f(x_n^2))$ i zbadaj ich zbieżność w sensie węższym.

□ Mamy tu

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n^1) = \lim_{n\to+\infty} \frac{|-\frac{1}{n}|}{-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} (-1) = -1, \quad \lim_{n\to+\infty} f(x_n^2) = \lim_{n\to+\infty} \frac{|\frac{1}{n}|}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1.$$

Oba ciągi (x_n^1) i (x_n^2) są zbieżne do zera ale odpowiadające im ciągi wartości funkcji f są zbieżne do różnych granic.

10.5. Niech $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ oraz $x_n^1 = 1 - \frac{1}{n}$ oraz $x_n^2 = 1 + \frac{1}{n}$.
a) Wykaż, że liczba 1 jest punktem skupienia dziedziny funkcji f,
b) Znajdź ciągi $(f(x_n^1))$ i $(f(x_n^2))$ i zbadaj ich zbieżność.

□ Zauważ, że $\lim_{n\to+\infty} x_n^1 = 1$ i $\lim_{n\to+\infty} x_n^2 = 1$ oraz $f(x) = \frac{1}{(1-x)(1+x)}$. Mamy tu:

$$f(x_n^1) = \frac{1}{[1-(1-\frac{1}{n})]\cdot[1+(1-\frac{1}{n})]} = \frac{1}{\frac{1}{n}(2-\frac{1}{n})} = \frac{n^2}{2n-1},$$

$$f(x_n^2) = \frac{1}{[1-(1+\frac{1}{n})]\cdot[1+(1+\frac{1}{n})]} = \frac{1}{-\frac{1}{n}(2+\frac{1}{n})} = \frac{-n^2}{2n+1}.$$

Jest $\lim_{n\to+\infty} f(x_n^1) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2n-1} = \infty$ oraz $\lim_{n\to+\infty} f(x_n^2) = \lim_{n\to+\infty} \frac{-n^2}{2n+1} = -\infty$.

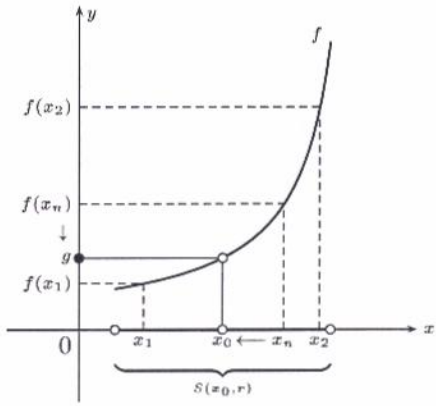
Istnieją dwa ciągi zbieżne do 1, dla których odpowiednie ciągi wartości funkcji f zdążają do różnych granic (i to niewłaściwych).

10.2. Granica funkcji w punkcie

Definicja 10-4 [GRANICA FUNKCJI W PUNKCIE (*definicja Heinego*[16])] Załóżmy, że $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, że $D_f \subset \mathbb{R}$ oraz że x_0 jest punktem skupienia zbioru D_f. Mówimy, że *liczba g jest granicą funkcji f w punkcie x_0* i zapisujemy $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$, jeśli

$$\forall (x_n) \ : [(x_n \to x_0) \wedge (x_n \in D_f) \wedge (x_n \neq x_0)] \Longrightarrow [f(x_n) \to g]. \tag{2}$$

Warunek (2) orzeka, że dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do x_0 i takiego, że jego wyrazy należą do dziedziny funkcji i są różne od x_0, odpowiadający mu ciąg wartości funkcji f jest zbieżny do g.



Rys. 166 Granica funkcji w punkcie a wykres tej funkcji

■ Funkcja $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ nie ma w punkcie $x_0 = 0$ wartości, ale punkt $x_0 = 0$ jest punktem skupienia dziedziny tej funkcji. Wykażemy, korzystając z definicji Heinego, że funkcja ta ma w punkcie $x_0 = 0$ granicę równą 0. Weźmy dowolny ciąg (x_n) taki, że $x_n \to 0$ i $x_n \neq 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$. Ciąg $(f(x_n))$ wartości funkcji odpowiadający ciągowi (x_n) jest określony wzorem $f(x_n) = x_n \sin \frac{1}{x_n}$. Ten ciąg $(f(x_n))$ jest iloczynem dwóch ciągów: (x_n), który jest zbieżny do zera i $(\sin \frac{1}{x_n})$, który jest ograniczony, a zatem z twierdzenia 6-9 (s. 108) wynika, że ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do zera, a to dowodzi, że

$$\lim_{x \to 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0.$$

10.6. Funkcja f określona jest wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{dla} \quad x \leqslant 2 \ \text{ i } \ x \neq 1, \\ -1 & \text{dla} \quad x = 1. \\ -x + 5 & \text{dla} \quad x > 2. \end{cases}$$

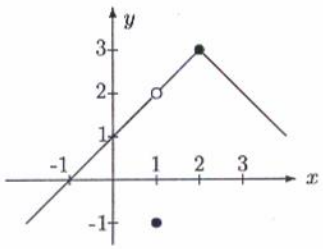
Wykaż, że $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$.

Jeżeli mamy na uwadze granicę funkcji f w punkcie x_0, to istotne jest zachowanie się funkcji tylko w pewnym sąsiedztwie punktu x_0. Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem liczbowym o wyrazach różnych od 1 i takim, że $x_n \to 1$. Możemy przyjąć,

[16] Eduard Heinrich Heine (1821-1881), matematyk niemiecki.

że $x_n \leqslant 2$ (dlaczego?). Z faktu, że $x_n \neq 1$ i $x_n \leqslant 2$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$ wynika, że $f(x_n) = x_n + 1$. Z twierdzeń o ciągach zbieżnych w sensie węższym wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + 1) = 1 + 1 = 2$, a to dowodzi, że $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$.

Odnieśmy procedury, o których mowa w definicji 10-4, do wykresu funkcji f (zob. rysunek 167). Zbieżny do $x_0 = 1$ ciąg (x_n) jest ciągiem punktów na osi odciętych. Jeśli te punkty zbliżają się do punktu $x_0 = 1$ (i to w jakikolwiek sposób, a więc od strony lewej, bądź prawej, bądź jeszcze inaczej), to odpowiadające im punkty wykresu zbliżają się do punktu (1,2) (zaznaczonego „pustym kółkiem", ten punkt wszak nie należy do wykresu). Jakkolwiek nie zbliżać się na osi odciętych do punktu $x_0 = 1$, zawsze odpowiednie punkty wykresy zbliżają się do wspomnianego punktu (1,2). Tym samym wartości funkcji zbliżają się do rzędnej tego punktu, tj. do liczby 2.



Rys. 167 Wykres funkcji f

Uwaga: Ograniczyliśmy wyrazy ciągu (x_n) do przedziału $(-\infty, 2]$, bo istotne są tylko punkty bliskie $x_0 = 1$, a więc z pewnego sąsiedztwa liczby 1.
Zauważ, że:
— $f(1) = -1$, a zatem funkcja f, o której mowa w ostatnim zadaniu, ma wartość w punkcie $x_0 = 1$,
— funkcja ta ma w tym punkcie granicę i jest ona równa 2,
— wartość funkcji f w punkcie $x_0 = 1$ i granica funkcji f w tym punkcie nie są równe.

10.7. Udowodnij, że: a) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2} = -4$, b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1} = \dfrac{1}{2}$.

□ Zauważ, że $x_0 = -2$ jest punktem skupienia dziedziny funkcji $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$.
Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem takim, że

$$\forall n \in \mathbb{N}_1 : (x_n \neq -2) \text{ i } \lim_{n\to+\infty} x_n = -2.$$

Odpowiedni ciąg wartości funkcji f jest ciągiem $f(x_n) = \frac{(x_n)^2-4}{x_n+2}$. Zauważmy, że

$$\frac{(x_n)^2-4}{x_n+2} = \frac{(x_n-2)(x_n+2)}{x_n+2} = x_n - 2, \text{ bo } x_n \neq -2,$$

a zatem

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty}(x_n - 2) = -2 - 2 = -4,$$

co należało wykazać.

Każda z funkcji, o których mowa w zadaniu 10.7, ma w rozważanym punkcie granicę, ale nie ma w tym punkcie wartości.

Twierdzenie 10-1 *Niech f i g będą funkcjami określonymi na tej samej dziedzinie, której punktem skupienia jest liczba x_0. Jeżeli $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ i $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$, to:*

1) *funkcja $f+g$ ma w punkcie x_0 granicę i $\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = a+b$.*

2) *funkcja $f-g$ ma w punkcie x_0 granicę i $\lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)] = a-b$.*

3) *funkcja $f\cdot g$ ma w punkcie x_0 granicę i $\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = a\cdot b$.*

4 *jeśli $g(x)\neq 0$ i $b\neq 0$, to funkcja $\frac{f}{g}$ ma w punkcie x_0 granicę i $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$.*

Dowód prawdziwości powyższych implikacji (dowód tych twierdzeń) wynika z twierdzeń o ciągach zbieżnych w sensie węższym (por. s. 110).

10.8. Znajdź granicę:
a) funkcji $f(x) = 2x+13$ w punkcie $x_0 = \pi$,
b) funkcji $g(x) = \frac{x^2+2x-1}{x^2+2}$ w punkcie $x_0 = 1$,

Z definicji granicy funkcji f w punkcie x_0 wynika, że jeśli istnieją dwa ciągi (x_n^1) i (x_n^2) spełniające warunki:

1) $(\lim_{n\to\infty} x_n^1 = x_0) \wedge \forall n\in\mathbb{N}_1 : [(x_n^1 \neq x_0 \wedge x_n^1 \in D_f) \wedge (\lim_{n\to\infty} f(x_n^1) = g_1)]$,

2) $(\lim_{n\to\infty} x_n^2 = x_0) \wedge \forall n\in\mathbb{N}_1 : [(x_n^2 \neq x_0 \wedge x_n^2 \in D_f) \wedge (\lim_{n\to\infty} f(x_n^2) = g_2)]$,

3) $g_1 \neq g_2$,

to w punkcie x_0 funkcja f nie posiada granicy.

Z rozwiązania zadania 10.4 wynika, że funkcja $f(x) = \frac{|x|}{x}$ nie ma granicy w punkcie $x_0 = 0$. Z rozwiązania zadania 10.5 wynika, że funkcja $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ nie posiada granicy w punkcie $x_0 = 1$.

10.9. Udowodnij, że określona na s. 51 funkcja Dirichleta D w żadnym punkcie nie posiada granicy.

W każdym punkcie wymiernym wartość funkcji D jest równa 1, w każdym punkcie niewymiernym wartość funkcji D jest równa 0.

□ Niech x_0 będzie liczbą wymierną oraz $x_n^1 = x_0 + \frac{1}{n}$ i $x_n^2 = x_0 + \frac{\sqrt{2}}{n}$. Oba ciągi (x_n^1) i (x_n^2) są zbieżne do x_0 i ich wyrazy są różne od x_0.
— Wyrazy ciągu (x_n^1) są liczbami wymiernymi, a zatem $D(x_n^1) = 1$ dla każdego $n\in\mathbb{N}_1$, czyli $\lim_{n\to\infty} D(x_n^1) = 1$.
— Wyrazy ciągu (x_n^2) są liczbami niewymiernymi, a zatem $D(x_n^2) = 0$ dla każdego $n\in\mathbb{N}_1$, czyli $\lim_{n\to\infty} D(x_n^2) = 0$.
Wskazaliśmy dwa ciągi argumentów zbieżne do x_0, dla których odpowiednie ciągi wartości funkcji D są zbieżne do różnych granic. Funkcja Dirichleta nie posiada zatem granicy w żadnym punkcie wymiernym.

□ Niech x_0 będzie liczbą niewymierną. Niech $x_n^1 = x_0 + \frac{1}{n}$. Przyjmijmy, że (x_n^2) jest ciągiem przybliżeń dziesiętnych liczby niewymiernej x_0. Oba ciągi (x_n^1) i (x_n^2) są zbieżne do x_0 i ich wyrazy są różne od x_0.

— Wyrazy ciągu (x_n^1) są liczbami niewymiernymi, a zatem $D(x_n^1) = 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$, czyli $\lim\limits_{n\to\infty} D(x_n^1) = 0$.

— Wyrazy ciągu (x_n^2) są liczbami wymiernymi, a zatem $D(x_n^2) = 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$, czyli $\lim\limits_{n\to\infty} D(x_n^2) = 1$.

Jeśli x_0 jest liczbą niewymierną, to funkcja D nie posiada w tym punkcie granicy. Tym samym wykazaliśmy, że w żadnym punkcie funkcja Dirichleta nie posiada granicy.

10.10. Funkcja f określona jest na zbiorze $\mathbb{R}$ wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{dla} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Wykaż, że ta funkcja f ma granicę tylko w punkcie $x_0 = 0$.

10.11. Rozważmy następujące funkcje i punkty x_0 na osi liczbowej:

a) $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$ i $x_0 = 2$,

b) $f(x) = [x]$ (funkcja *entier*, zob. s. 55) i $x_0 = 1$,

c) $f(x) = x - [x]$ (funkcja *mantysa*, zob. s. 55) i $x_0 = 2$,

d) $f(x) = \frac{|x|-x}{2x}$ i $x_0 = 0$,

e) $f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ i $x_0 = 0$.

Dla każdej z tych funkcji udowodnij, że w punkcie x_0 nie ma ona granicy.

□ Niech $f(x) = \frac{|x|-x}{2x}$ i $x_0 = 0$. Rozważmy dwa ciągi: $x_n^1 = \frac{1}{n}$ i $x_n^2 = -\frac{1}{n}$. Oba są zbieżne do zera, ich wyrazy są różne od zera i należą do dziedziny funkcji f. Jest $f(x_n^1) = \frac{|\frac{1}{n}|-\frac{1}{n}}{2\frac{1}{n}} = 0$, a więc $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n^1) = 0$. Z kolei $f(x_n^2) = \frac{|-\frac{1}{n}|-(-\frac{1}{n})}{2(-\frac{1}{n})} = -1$, a więc $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n^2) = -1$. Mamy więc

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n^1) = 0 \neq -1 = \lim_{n\to\infty} f(x_n^2),$$

a to dowodzi, że funkcja f nie ma granicy w punkcie $x_0 = 0$.

Definicja 10-5 [GRANICA FUNKCJI W PUNKCIE (*definicja Cauchy'ego*[17])] Załóżmy, że $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, że $D_f \subset \mathbb{R}$ oraz że x_0 jest punktem skupienia zbioru D_f. Mówimy, że *liczba g jest granicą funkcji f w punkcie x_0* i zapisujemy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$, jeśli

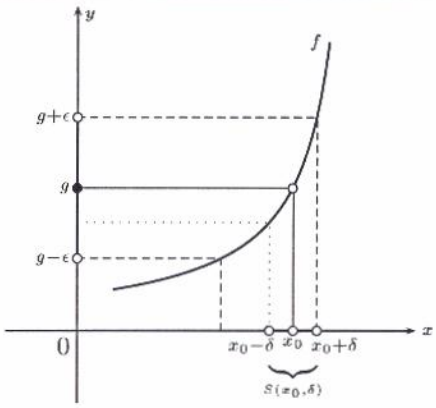
$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x : [0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - g| < \epsilon]. \tag{3}$$

Warunek (3) orzeka, że

$$\forall 0t(g, \epsilon) \;\; \exists S(x_0, \delta) \;\; \forall x : [x \in S(g, \epsilon) \Longrightarrow f(x) \in 0t(g, \epsilon).$$

Definicja 10-5 nazywa się *definicją Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie* i jest równoważna z definicją 10-4 (definicją Heinego). W myśl definicji Cauchy'ego liczba g jest granicą funkcji w punkcie x_0, jeśli dla każdego otoczenia liczby g na osi rzędnych istnieje takie sąsiedztwo liczby x_0 na osi odciętych, że jeśli tylko x należy do tego sąsiedztwa liczby x_0, to $f(x)$ należy do wspomnianego otoczenia liczby g.

[17] Augustin Louis Cauchy (1789-1857), matematyk francuski



Rys. 168 Idea definicji granicy funkcji w punkcie według Cauchy'ego

10.3. Granice jednostronne funkcji w punkcie

Jeżeli $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ i $\forall n \in \mathbb{N}_1 : [a_n < a]$, to mówimy, że *ciąg* (a_n) *jest zbieżny do* a *od strony lewej* albo, że *zdąża do* a *od strony lewej* (po wartościach mniejszych od a).

Jeżeli $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$ i $\forall n \in \mathbb{N}_1 : [b_n > b]$, to mówimy, że *ciąg* (b_n) *jest zbieżny do* a *od strony prawej* lub, że *zdąża do* a *od strony prawej* (po wartościach większych od b).

■ Niech $a_n = 13 - \frac{1}{n}$. Ten ciąg (a_n) zdąża do granicy 13 od strony lewej.

■ Niech $b_n = 13 + \frac{1}{n}$. Ten ciąg (b_n) zdąża do granicy 13 od strony prawej.

■ Ciąg $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ zdąża do liczby e. Z faktu, że ten ciąg (a_n) jest rosnący (por. s. 108), wynika że zdąża on do liczby e od strony lewej.

10.12. Niech $s_1 = \frac{1}{2}$ i $s_n = \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + \cdots + (\frac{1}{2})^n$ dla $n > 1$. Wykaż, że ten ciąg (s_n) zdąża do 1 od strony lewej.

Definicja 10-6 [GRANICA LEWOSTRONNA FUNKCJI W PUNKCIE (*definicja Heinego*)] Załóżmy, że $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, że $D_f \subset \mathbb{R}$ oraz że x_0 jest punktem skupienia zbioru D_f. Mówimy, że *liczba* g *jest granicą lewostronną funkcji* f *w punkcie* x_0 i zapisujemy $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = g$, jeśli

$$\forall (x_n) \ : [(x_n \to x_0) \wedge (x_n \in D_f) \wedge (x_n < x_0)] \Longrightarrow [f(x_n) \to g]. \tag{4a}$$

Definicja 10-7 [GRANICA PRAWOSTRONNA FUNKCJI W PUNKCIE (*definicja Heinego*)] Załóżmy, że $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, że $D_f \subset \mathbb{R}$ oraz że x_0 jest punktem skupienia zbioru D_f. Mówimy, że *liczba* g *jest granicą prawostronną funkcji* f *w punkcie* x_0 i zapisujemy $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = g$, jeśli

$$\forall (x_n) \ : [(x_n \to x_0) \wedge (x_n \in D_f) \wedge (x_n > x_0)] \Longrightarrow [f(x_n) \to g]. \tag{4b}$$

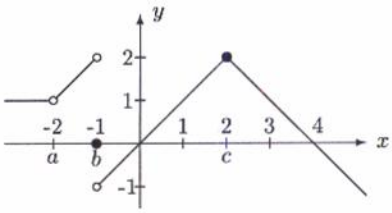
Warunek (4a) orzeka, że dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach należących do dziedziny funkcji f i zbieżnego do x_0 od strony lewej, odpowiadający mu ciąg wartości funkcji f jest zbieżny do g.

Warunek (4b) orzeka, że dla każdego ciągu (x_n) o wartościach należących do dziedziny funkcji f i zbieżnego do x_0 od strony prawej, odpowiadający mu ciąg wartości funkcji f jest zbieżny do g.

Twierdzenie 10-2 *Jeżeli* $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = g = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, *to funkcja* f *ma granicę w punkcie* x_0 *i* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$.

Twierdzenie 10-3 *Jeżeli* $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = g_1$ *i* $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = g_2$ *i* $g_1 \neq g_2$, *to funkcja* f *nie ma granicy w punkcie* x_0.

10.13. Rysunek 169 przedstawia wykres pewnej funkcji f określonej na $\mathbb{R}$.
a) Znajdź przepis na wartość tej funkcji w każdym punkcie;
b) Na wykresie wyróżniono kółkiem („pustym" lub „zaciemnionym") pięć punktów. Ich odciętymi są liczby $a = -2$, $b = -1$ i $c = 2$. Korzystając z wykresu funkcji f rozstrzygnij istnienie granicy funkcji f w każdym z tych punktów: a, b i c.



Rys. 169 Wykres pewnej funkcji f

□ W punkcie a funkcja f ma granicę równą 1, bo jakkolwiek zbliżać się po osi odciętych do punktu a, odpowiednie punkty wykresu funkcji f zbliżają się do punktu o współrzędnych $(-2, 1)$. W punkcie a funkcja f nie posiada wartości.

W punkcie b funkcja f ma wartość. Jest $f(b) = 0$, a więc b jest miejscem zerowym funkcji f. Ale funkcja f nie ma w punkcie b granicy. Jeśli do punktu b zbliżać się po osi odciętych z lewej strony (po wartościach mniejszych od b), to odpowiednie punkty wykresu zbliżają się do punktu o współrzędnych $(-1, 2)$ (górne „puste" kółko). Istnieje granica lewostronna funkcji f w punkcie b i

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = 2.$$

Jeśli zdążać do punktu b po osi odciętych ale od strony prawej (po wartościach większych od b), to odpowiednie punkty wykresy zbliżają się do punktu o współrzędnych $(-1, -1)$. Istnieje granica prawostronna funkcji f w punkcie b i

$$\lim_{x\to b^+} f(x) = -1.$$

Granice jednostronne funkcji f w punkcie $b = -1$ nie są równe, a więc funkcja f nie ma granicy w punkcie b. W punkcie $c = 2$ funkcja f ma granicę i ma wartość $(f(c) = 2)$ i wartość jest równa granicy.

10.14. Wykaż, że $\lim\limits_{x\to 1^+} (3x - 1) = 2$.

□ Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem zbieżnym do 1 od strony prawej, tj. po wartościach większych niż 1. Odpowiedni ciąg wartości funkcji $f(x) = 3x - 1$ jest ciągiem

$f(x_n) = 3x_n - 1$. Z faktu, że $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$ oraz z twierdzeń o ciągach zbieżnych w sensie węższym wynika, że $\lim\limits_{n\to+\infty}(3x_n - 1) = \lim\limits_{n\to+\infty} 3x_n - 1 = 3 \cdot 1 - 1 = 2$.

10.15. Uzasadnij, że:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = 1$, b) $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{|x^2-1|}{x-1} = -2$, c) $\lim\limits_{x\to 3^+} [-x] = -4$, d) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{8-x^3}{|2-x|} = 12$.

□ Rozważmy funkcję $f(x) = \frac{|x^2-1|}{x-1}$ i punkt $x_0 = 1$. W tym punkcie x_0 funkcja f nie ma wartości. Weźmy dowolny ciąg (x_n) spełniający układ warunków:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1 \quad \text{i} \quad \forall n \in \mathbb{N}_1 : (0 < x_n < 1).$$

Odpowiedni ciąg wartości funkcji f jest ciągiem $f(x_n) = \frac{|(x_n)^2-1|}{x_n-1}$. Z tego, że $0 < x_n < 1$ wynika, iż $0 < (x_n)^2 < 1$, a zatem $(x_n)^2 - 1 < 0$, a to oznacza, że $|(x_n)^2 - 1| = 1 - (x_n)^2$. Ostatecznie jest więc

$$f(x_n) = \frac{1-(x_n)^2}{x_n - 1} = \frac{(1-x_n)(1+x_n)}{-(1-x_n)} = -1 - x_n,$$

a zatem

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty}(-1 - x_n) = -2.$$

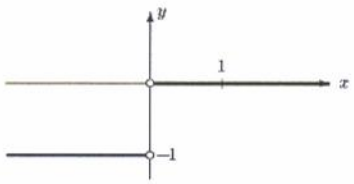
Z definicji granicy lewostronnej funkcji w punkcie wynika, że

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{|x^2-1|}{x-1} = -2.$$

■ Powróćmy do funkcji $f(x) = \frac{|x|-x}{2x}$ z zadania 10.11d. Dla $x < 0$ jest $\frac{|x|-x}{2x} = -1$, dla $x > 0$ jest $\frac{|x|-x}{2x} = 0$. Funkcja f, o której mowa, jest zatem określona wzorem dwuczłonowym:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla} \quad x < 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x > 0. \end{cases}$$

Zbadajmy istnienie granicy lewo- i prawostronnej tej funkcji f w punkcie $x_0 = 0$. Wykres funkcji f może nam zasugerować ideę argumentacji. Wykres funkcji f prezentuje rysunek 170.



Rys. 170 Wykres funkcji $f(x) = \frac{|x|-x}{2x}$

Jeśli po osi odciętych zbliżamy się do punktu $x_0 = 0$ od strony lewej (po wartościach ujemnych), to odpowiednie wartości funkcji są stale równe (-1), a zatem zdążają do (-1). Jeśli zbliżamy się do punktu $x_0 = 0$ od strony prawej (po wartościach dodatnich), to odpowiednie wartości funkcji f są stale równe 0, a zatem zdążają do zera. Z wykresu funkcji f daje się zatem łatwo odczytać, że:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1 \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0.$$

10.16. Dane są trzy funkcje liczbowo-liczbowe określone następująco:

a) $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{dla } x < 0, \\ x^2+1 & \text{dla } x \geqslant 0; \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x-1} & \text{dla } x \neq 1, \\ 0 & \text{dla } x = 1; \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{dla } x < 0, \\ x^2+1 & \text{dla } x \geqslant 0. \end{cases}$

Znajdź: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$.

□ Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem zbieżnym do 0 od strony lewej. Oznacza to, że $x_n < 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$. Odpowiedni ciąg wartości funkcji h jest ciągiem $h(x_n) = 1-(x_n)^2$. Z faktu, że $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ i z twierdzeń o ciągach zbieżnych w sensie węższym wynika, że $\lim\limits_{n\to+\infty} h(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}[1-(x_n)^2] = 1$, czyli $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = 1$.
Analogicznie, biorąc dowolny ciąg (x_n) zbieżny do zera od strony prawej, dostaniemy, że $h(x_n) = (x_n)^2 + 1$, a ten ciąg zdąża do 1, a to oznacza, że $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = 1$.
Zauważ, że $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = 1 = \lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$, a więc funkcja h ma w punkcie $x_0 = 0$ granicę i $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 1$.

10.17. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 1. Wysokość ostrosłupa ma długość x. Niech $r(x)$ będzie promieniem kuli opisanej na tym ostrosłupie. Jest tu $r(x)$ funkcją określoną na przedziale $(0,+\infty)$. Podaj przepis na tę funkcję r. Zbadaj istnienie granicy: a) $\lim\limits_{x\to 0^+} r(x)$, b) $\lim\limits_{x\to\infty} r(x)$.

□ Można wykazać, że

$$r(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{1}{4x} & \text{dla } 0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \frac{x}{2} - \frac{1}{4x} & \text{dla } x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Jest więc $\lim\limits_{x\to 0^+} r(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(\frac{x}{2} + \frac{1}{4x}) = +\infty$ i $\lim\limits_{x\to+\infty} r(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x}{2} - \frac{1}{4x}) = +\infty$

10.4. Granice niewłaściwe funkcji w punkcie

Definicja 10-8 [GRANICA NIEWŁAŚCIWA FUNKCJI W PUNKCIE (*definicja Heinego*)]
Załóżmy, że $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, że $D_f \subset \mathbb{R}$ oraz że x_0 jest punktem skupienia zbioru D_f.
— Mówimy, że *granicą funkcji f w punkcie x_0 jest* $-\infty$ i zapisujemy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, jeśli

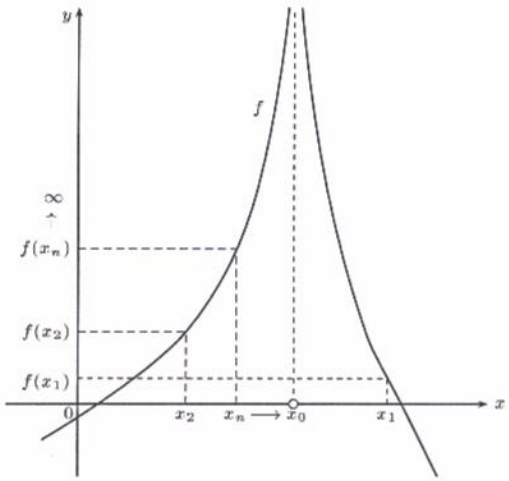
$$(5a) \qquad \forall (x_n) : [(x_n \to x_0) \wedge (x_n \in D_f) \wedge (x_n \neq x_0)] \Longrightarrow [f(x_n) \to -\infty].$$

— Mówimy, że *granicą funkcji f w punkcie x_0 jest* $+\infty$ i zapisujemy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, jeśli

$$(5b) \qquad \forall (x_n) : [(x_n \to x_0) \wedge (x_n \in D_f) \wedge (x_n \neq x_0)] \Longrightarrow [f(x_n) \to +\infty].$$

Warunek (5a) orzeka, że dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do x_0 i takiego, że jego wyrazy należą do dziedziny funkcji i są różne od x_0, odpowiadający mu ciąg wartości funkcji f jest zbieżny do $-\infty$.

Warunek (5*b*) orzeka, że dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do x_0 i takiego, że jego wyrazy należą do dziedziny funkcji i są różne od x_0, odpowiadający mu ciąg wartości funkcji f jest zbieżny do $+\infty$ (por. rysunek 171).



Rys. 171 Definicja Heinego granicy niewłaściwej funkcji w punkcie x_0 a wykres funkcji

10.18. Wykaż, że: a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+7}{(x-1)^2}=+\infty$, b) nie istnieje granica funkcji $f(x)=\frac{7}{x^2-1}$ w punkcie $x_0=1$.

□ Niech $f(x)=\frac{x^3+7}{(x-1)^2}$. Załóżmy, że (x_n) jest dowolnym ciągiem zbieżnym do 1, przy czym $x_n\neq 1$ dla $n=1,2,3,\ldots$. Odpowiedni ciąg wartości funkcji f jest ciągiem $f(x_n)=\frac{(x_n)^3+7}{(x_n-1)^2}=[(x_n)^3+7]\cdot\frac{1}{(x_n-1)^2}$. Z twierdzeń o granicy ciągów zbieżnych w sensie węższym wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty}[(x_n)^3+7]=1^3+7=8$, bo $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$. Z faktu, że $x_n\to 1$, wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-1)^2=0$. Jest $(x_n-1)^2>0$, a zatem z twierdzenia 6-20 (2) wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(x_n-1)^2}=+\infty$. Iloczyn dwu ciągów, z których pierwszy zdąża do 8, drugi zaś do $+\infty$, jest ciągiem zbieżnym do $+\infty$ (jakbyś to uzasadnił?), a zatem mamy ostatecznie, że $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=+\infty$, a to oznacza, że spełniony jest warunek (5*b*) w definicji 10-8, czyli

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+7}{(x-1)^2}=+\infty,$$

co należało stwierdzić.

10.19. Udowodnij, że granicą funkcji $f(x)=\frac{1}{x^2}$ w punkcie $x_0=0$ jest $+\infty$ oraz, że funkcja $g(x)=\frac{1}{x}$ w punkcie $x_0=0$ nie ma granicy w sensie szerszym.

10.20. Rozważmy następujące równanie z parametrem $ax^2-2x-8=0$. Jeśli $a>0$, to równanie ma dwa pierwiastki: $x_1(a)$ i $x_2(a)$. Niech $x_1(a)<x_2(a)$. Wykaż, że:

$$\lim_{a\to 0^-}x_1(a)=-4,\qquad \lim_{a\to 0^+}x_2(a)=+\infty,\qquad \lim_{a\to+\infty}x_1(a)=0,\qquad \lim_{a\to+\infty}x_2(a)=0.$$

Wskazówka: Zauważ, że $x_1(a)$ i $x_2(a)$ są odciętmi punktów przecięcia się wykresów funkcji $f(x)=ax^2$ i $g(x)=2x+8$.

10.5. Niewłaściwe granice jednostronne funkcji w punkcie

Analogicznie, jak w przypadku skończonych granic jednostronnych wprowadza się niewłaściwe granice lewo- i prawostronne funkcji f w punkcie x_0

Definicja 10-9 [NIEWŁAŚCIWE GRANICE JEDNOSTRONNE FUNKCJI W PUNKCIE] Załóżmy, że $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, że $D_f \subset \mathbb{R}$ oraz że x_0 jest punktem skupienia zbioru D_f.

— Mówimy, że *granicą lewostronną funkcji f w punkcie x_0 jest* $+\infty$ i zapisujemy $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$, jeśli

$$\forall (x_n) \ : [(x_n \to x_0) \wedge (x_n \in D_f) \wedge (x_n < x_0)] \Longrightarrow [f(x_n) \to +\infty]. \tag{6a}$$

— Mówimy, że *granicą prawostronną funkcji f w punkcie x_0 jest* $+\infty$ i zapisujemy $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$, jeśli

$$\forall (x_n) \ : [(x_n \to x_0) \wedge (x_n \in D_f) \wedge (x_n > x_0)] \Longrightarrow [f(x_n) \to +\infty]. \tag{6b}$$

Warunek (6*a*) orzeka, że dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do x_0 od strony lewej i takiego, że jego wyrazy należą do dziedziny funkcji, odpowiadający mu ciąg wartości funkcji f jest zbieżny do $+\infty$.

Warunek (6*b*) orzeka, że dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do x_0 od strony prawej i takiego, że jego wyrazy należą do dziedziny funkcji, odpowiadający mu ciąg wartości funkcji f jest zbieżny do $+\infty$.

Analogicznie określamy granice $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ i $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$.

Twierdzenie 10-4 *Jeżeli* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ *i* $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$, *to w punkcie* x_0 *funkcja f ma granicę* $+\infty$, *czyli* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

Twierdzenie 10-5 *Jeżeli* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ *i* $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$, *to w punkcie* x_0 *funkcja f ma granicę* $-\infty$, *czyli* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Twierdzenie 10-6 *Jeżeli* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ *i* $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$, *to w punkcie* x_0 *funkcja f nie posiada granicy.*

10.21. Udowodnij, że $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{1}{x+2} = -\infty$ oraz $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{1}{x+2} = +\infty$.

10.22. Niech $f(x) = \frac{1}{x}$ dla $x \in \mathbb{R}$. Wykres tej funkcji f przedstawiono na rys. 56 na s. 82. Wykaż, że $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ oraz $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$. Funkcja f nie ma zatem granicy w punkcie $x_0 = 0$.

10.6. Granice funkcji w nieskończoności

Definicja 10-10 [SĄSIEDZTWA NIESKOŃCZONOŚCI] *Sąsiedztwem* $-\infty$ nazywamy każdy przedział liczbowy postaci $(-\infty, a)$ i oznaczamy $S(-\infty)$. *Sąsiedztwem* $+\infty$ nazywamy każdy przedział liczbowy $(b, +\infty)$ i oznaczamy $S(+\infty)$.

Definicja 10-11 [GRANICA SKOŃCZONA FUNKCJI W NIESKOŃCZONOŚCI]
1. Niech $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ i $D_f \subset \mathbb{R}$. Załóżmy, że f jest funkcją określoną w pewnym sąsiedztwie $-\infty$.
— Mówimy, że *granicą funkcji* f *w* $-\infty$ *jest liczba* g i zapisujemy $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = g$, jeśli

$$\forall(x_n) \ : [(x_n \to -\infty) \wedge (x_n \in D_f)] \Longrightarrow [f(x_n) \to g]. \tag{7a}$$

2. Niech $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ i $D_f \subset \mathbb{R}$. Załóżmy, że f jest funkcją określoną w pewnym sąsiedztwie $+\infty$.
— Mówimy, że *granicą funkcji* f *w* $+\infty$ *jest liczba* g i zapisujemy $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = g$, jeśli

$$\forall(x_n) \ : [(x_n \to +\infty) \wedge (x_n \in D_f)] \Longrightarrow [f(x_n) \to g]. \tag{7b}$$

Warunek (7*a*) orzeka, że dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do $-\infty$ i takiego, że jego wyrazy należą do dziedziny funkcji, odpowiadający mu ciąg $(f(x_n))$, tj. ciąg wartości funkcji f, jest zbieżny do g.

Warunek (7*b*) orzeka, że dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do $+\infty$ i takiego, że jego wyrazy należą do dziedziny funkcji, odpowiadający mu ciąg $(f(x_n))$, tj. ciąg wartości funkcji f jest zbieżny do g.

10.23. Niech $f(x) = \frac{1}{x}$ dla $x \in \mathbb{R}$ i $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$ dla $x \in \mathbb{R}$. O tych funkcjach mowa jest w zadaniu 4.71 (s. 59). Wykresy tych funkcji (por. rysunki 56 i 57) sugerują, że:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \quad \text{oraz} \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.$$

Udowodnij to, korzystając z definicji 10-11.

10.24. Udowodnij, że:

$$\text{a)} \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x+3} = 0, \quad \text{b)} \lim_{x\to-\infty} \frac{2-3x^2}{x^2+1} = -3, \quad \text{c)} \lim_{x\to-\infty} (1-e^x) = 1.$$

10.25. Udowodnij, że funkcja $f(x) = \sin^2 x$ nie ma granicy w $+\infty$.

Definicja 10-12 [GRANICE NIEWŁAŚCIWE FUNKCJI W NIESKOŃCZONOŚCI]
1. Niech $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ i $D_f \subset \mathbb{R}$. Załóżmy, że funkcja f jest określona w pewnym sąsiedztwie $+\infty$.
— Mówimy, że *granicą funkcji* f *w* $+\infty$ *jest* $+\infty$ i zapisujemy $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, jeśli

$$\forall(x_n) : [(x_n \to +\infty) \wedge (x_n \in D_f)] \Longrightarrow [f(x_n) \to +\infty]. \tag{8a}$$

— Mówimy, że *granicą funkcji* f *w* $+\infty$ *jest* $-\infty$ i zapisujemy $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, jeśli

$$\forall(x_n) : [(x_n \to +\infty) \wedge (x_n \in D_f)] \Longrightarrow [f(x_n) \to -\infty]. \tag{8b}$$

2. Niech $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ i $D_f \subset \mathbb{R}$. Załóżmy, że funkcja f jest określona w pewnym sąsiedztwie $-\infty$.

— Mówimy, że *granicą funkcji* f *w* $-\infty$ *jest* $-\infty$ i zapisujemy $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, jeśli

$$\forall(x_n) : [(x_n \to -\infty) \wedge (x_n \in D_f)] \Longrightarrow [f(x_n) \to -\infty]. \tag{8c}$$

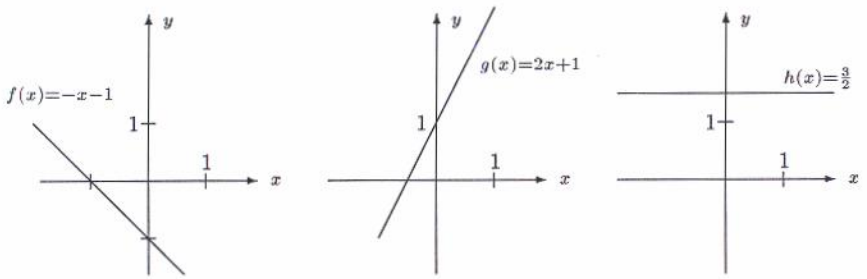
— Mówimy, że *granicą funkcji* f *w* $-\infty$ *jest* $+\infty$ i zapisujemy $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, jeśli

$$\forall(x_n) : [(x_n \to -\infty) \wedge (x_n \in D_f)] \Longrightarrow [f(x_n) \to +\infty]. \tag{8d}$$

Warunek (8*a*) orzeka, że dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do $+\infty$ i takiego, że jego wyrazy należą do dziedziny funkcji, odpowiadający mu ciąg wartości funkcji f jest zbieżny do $+\infty$.

Warunek (8*d*) orzeka, że dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do $-\infty$ i takiego, że jego wyrazy należą do dziedziny funkcji, odpowiadający mu ciąg wartości funkcji f jest zbieżny do $+\infty$.

10.26. Rysunek 172 przedstawia wykresy trzech funkcji liniowych: $f(x) = -x - 1$, $g(x) = 2x + 1$ oraz $h(x) = \frac{3}{2}$. Odczytaj z wykresu, jakie są granice każdej z tych funkcji w $-\infty$, a jakie w $+\infty$. Udowodnij to następnie, korzystając z definicji 10-12.



Rys. 172 Wykresy trzech funkcji liniowych

■ Rozważmy funkcję liniową $f(x) = ax + b$, gdzie $x \in \mathbb{R}$. Załóżmy, że $a \neq 0$. Jeżeli $a > 0$, to funkcja f jest rosnąca i

$$\lim_{x\to-\infty}(ax + b) = -\infty \quad \text{oraz} \quad \lim_{x\to+\infty}(ax + b) = +\infty.$$

Jeżeli $a < 0$, to funkcja f jest malejąca i

$$\lim_{x\to-\infty}(ax + b) = +\infty \quad \text{oraz} \quad \lim_{x\to+\infty}(ax + b) = -\infty.$$

10.27. Niech $f(x) = ax^2 + bx + c$ dla $x \in \mathbb{R}$, przy czym $a \neq 0$. Znajdź w zależności od parametru a granice:

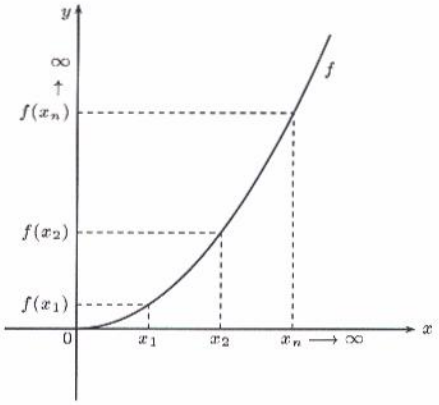
$$\lim_{x\to-\infty}(ax^2 + bx + c) \quad \text{oraz} \quad \lim_{x\to+\infty}(ax^2 + bx + c).$$

10.28. Niech $f(x) = |x|$ dla $x \in \mathbb{R}$. Funkcja f przypisuje liczbie rzeczywistej x jej wartość bezwzględną. Wykaż, że

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \text{ i } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

□ Weźmy dowolny taki ciąg (x_n), że $x_n \to -\infty$ i że $x_n < 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$ (dlaczego można się tu ograniczyć do ciągów o wyrazach ujemnych?). Jest wówczas

$f(x_n) = -x_n$, a zatem z faktu, że $x_n \to -\infty$ wynika, że $-x_n \to +\infty$, a to dowodzi, że $\lim\limits_{x\to-\infty} |x| = +\infty$.



Rys. 173 Wykres funkcji f a fakt, że $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

10.7. Granice niektórych funkcji

Niżej podajemy granice pewnych funkcji:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a, \text{ gdy } a>0,$$

$$\lim_{x\to0}(1+\frac{a}{x})^x = a^a, \quad \lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e, \quad \lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e.$$

Te fakty będziemy wykorzystywać do obliczania granic pewnych funkcji w punkcie 0 lub w $+\infty$.

10.29. Korzystając z powyższych wzorów na granice niektórych funkcji oblicz:

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 5x}$, b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{3x+5}{3x+7})^{x+1}$, c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\dfrac{1}{x^2})^{2x-1}$.

10.30. Zbadaj istnienie w punkcie $x_0 = 0$ granicy funkcji: $f(x) = \sin x$ i $g(x) = x\sin x$.

Skorzystamy z faktu, że $= \sin x = \frac{x}{x}\cdot\sin x = x\cdot\frac{\sin x}{x}$ dla $x \neq 0$.

Weźmy dowolny ciąg (x_n) taki, że $x_n \to 0$ i $x_n \neq 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$. Odpowiedni ciąg wartości funkcji f dla ciągu (x_n) jest określony wzorem $f(x_n) = \sin x_n$. Ponieważ $x_n \neq 0$, zatem

$$f(x_n) = \sin x_n = \frac{x_n}{x_n}\cdot\sin x_n = x_n\cdot\frac{\sin x_n}{x_n}.$$

Z faktu, że $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin x_n}{x_n} = 1$ dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do zera po wartościach różnych od zera. Z twierdzenia o granicy iloczynu ciągów zbieżnych w sensie węższym wynika zatem, że

$$\lim_{n\to\infty} x_n \cdot \frac{\sin x_n}{x_n} = 0 \cdot 1 = 0.$$

Wykazaliśmy tym samym, że $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$.

10.8. Wspólna postać definicji granicy funkcji w punkcie

Niech $\alpha \in \mathbb{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$ i $\beta \in \mathbb{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$. Załóżmy, że funkcja $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ jest określona w pewnym sąsiedztwie α. Mówimy, że β *jest granicą funkcji* f *w punkcie* α i zapisujemy $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$, jeśli

$$\forall(x_n) : [(x_n \to \alpha) \wedge (x_n \in D_f) \wedge x_n \neq \alpha)] \Longrightarrow [f(x_n) \to \beta]. \tag{9}$$

10.9. Asymptoty funkcji liczbowo-liczbowej

Niech D_f oznacza dalej dziedzinę funkcji liczbowo-liczbowej f.

Definicja 10-13 [ASYMPTOTA PIONOWA LEWOSTRONNA] Załóżmy, że $(a, c) \subset D_f$. Prostą $x = c$ nazywamy *lewostronną asymptotą pionową funkcji* f, jeżeli

$$\lim_{x\to c-} f(x) = -\infty \text{ lub } \lim_{x\to c-} f(x) = +\infty.$$

Definicja 10-14 [ASYMPTOTA PIONOWA PRAWOSTRONNA] Załóżmy, że $(c, b) \subset D_f$. Prostą $x = c$ nazywamy *prawostronną asymptotą pionową funkcji* f, jeżeli

$$\lim_{x\to c+} f(x) = -\infty \text{ lub } \lim_{x\to c+} f(x) = +\infty.$$

Definicja 10-15 [ASYMPTOTA PIONOWA] Załóżmy, że $S(c, \epsilon) \subset D_f$. Prostą $x = c$ nazywamy *obustronną asymptotą pionową wykresu funkcji* f albo krótko *asymptotą pionową funkcji* f, jeżeli prosta $x = c$ jest równocześnie asymptotą lewo- i prawostronną funkcji f.

10.31. Rozstrzygnij, czy podana prosta $x = c$ jest asymptotą pionową funkcji f, jeśli: a) $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$ i $c = 1$, b) $f(x) = ln(4 - x)$ i $c = 4$, c) $f(x) = \frac{e^{-x}-1}{e^x-1}$ i $c = 0$.

Definicja 10-16 [ASYMPTOTA UKOŚNA LEWOSTRONNA] Niech f będzie funkcją liczbowo-liczbową i taką, że $(-\infty, \alpha) \subset D_f$. Prosta o równaniu $y = ax + b$ nazywa się *asymptotą ukośną lewostronną funkcji* f, jeśli

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Definicja 10-17 [ASYMPTOTA UKOŚNA PRAWOSTRONNA] Niech f będzie funkcją liczbowo-liczbową i taką, że $(\beta, +\infty) \subset D_f$. Prosta o równaniu $y = ax + b$ nazywa się *asymptotą ukośną prawostronną funkcji* f, jeśli

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Definicja 10-18 [ASYMPTOTA UKOŚNA] Jeżeli prosta $y = ax+b$ jest zarówno asymptotą ukośną lewostronną i prawostronną, to nazywmay ją *asymptotą ukośną*.

10.32. Niech $f(x) = \frac{(x+2)^2}{(x+1)^3}$. Wykaż, że prosta $x = -1$ jest asymptotą pionową funkcji f a prosta $y = x + 5$ jej asymptotą ukośną.

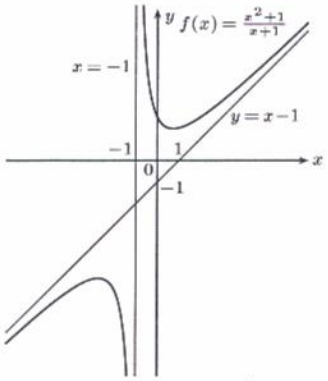
Definicja 10-19 [ASYMPTOTA POZIOMA] Jeżeli $a = 0$, to asymptotę ukośną $y = ax + b$ nazywamy *asymptotą poziomą*.

Twierdzenie 10-7 [TWIERDZENIE O ASYMPTOCIE UKOŚNEJ] *Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną lewostronną wykresu funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$a = \lim_{x \to -\infty} [\frac{f(x)}{x}] \quad oraz \quad b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - ax].$$

Analogicznie formułuje się warunek konieczny i wystarczający na to, aby prosta $y = ax + b$ była asymptotą ukośną prawostronną funkcji f.

■ Niech $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$. Asymptotą ukośną tej funkcji f jest prosta $y = x-1$, asymptotą pionową zaś jest prosta $x = -1$. Wykres funkcji f i jej asymptoty prezentuje rys. 174.



Rys. 174 Asymptoty funkcji $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$, pionowa i ukośna

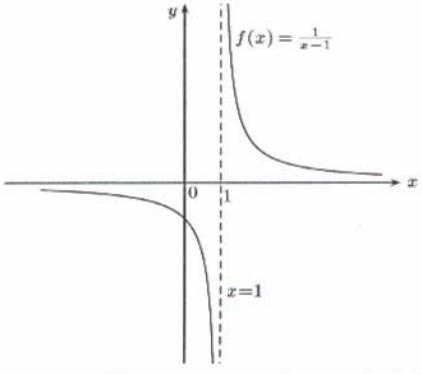
Na s. 83 określono funkcję $h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $c \neq 0$, $a \cdot d - b \cdot c \neq 0$ i $x \neq -\frac{d}{c}$. Nazywamy ją *funkcją homograficzną.*

Twierdzenie 10-8 [TWIERDZENIE O ASYMPTOTACH FUNKCJI HOMOGRAFICZNEJ] *Jeżeli $h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $c \neq 0$, $a \cdot d - b \cdot c \neq 0$ i $x \neq -\frac{d}{c}$, to*

— *prosta $x = -\frac{d}{c}$ jest jej asymptotą pionową,*

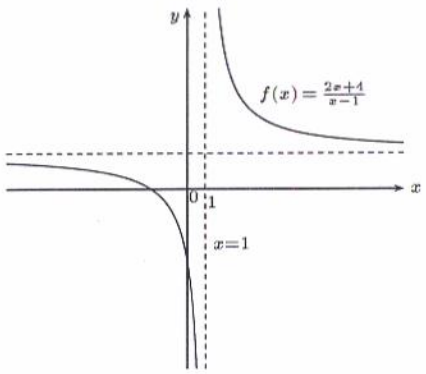
— *prosta $y = \frac{a}{c}$ jest jej asymptotą poziomą.*

10.33. Funkcja $f(x) = \frac{1}{x-1}$ jest funkcją homograficzną. Wykaż, że prosta $x = 1$ jest jej asymptotą pionową.



Rys. 175 Prosta $x = 1$ jako asymptota pionowa funkcji $f(x) = \frac{1}{x-1}$

10.34. Rozważmy funkcję homograficzną $h(x) = \frac{2x+4}{x-1}$. Wykaż, że prosta $x = 1$ jest jej asymptotą pionową oraz że prosta $y = -2$ jest jej asymptotą poziomą.



Rys. 176 Asymptota pionowa i asymptota pozioma funkcji $h(x) = \frac{2x+4}{x-1}$

10.35. Dane są funkcje:

$$f(x) = \frac{x^3+8}{x^2-4}, \quad g(x) = \frac{1}{x^2}\sin x \quad \text{oraz} \quad h(x) = x\ln(e + \tfrac{1}{x}).$$

Znajdź asymptoty pionowe i ukośne (jeśli istnieją!) każdej z tych funkcji.

10.36. Znajdź asymptoty pionowe i ukośne (jeśli istnieją!) następujących funkcji:

a) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$, b) $g(x) = \frac{1}{1-x^2}$, c) $h(x) = \frac{1}{x}\sin x$.

10.10. Funkcja ciągła w punkcie

Definicja 10-20 [FUNKCJA CIĄGŁA W PUNKCIE (*definicja Heinego*)] Załóżmy, że funkcja f jest określona w otoczeniu punktu x_0. Mówimy, że funkcja f jest *ciągła w punkcie* x_0, jeśli ma w tym punkcie wartość i ma granicę i $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

10.37. Wykaż, że funkcja $f(x) = 3x^2 - 2x$ jest ciągła w punkcie $x_0 = 1$ oraz że nie jest ciągła w tym punkcie $x_0 = 1$ funkcja g, gdzie

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{1-x^3} & \text{dla} \quad x \neq 1, \\ 1 & \text{dla} \quad x = 1. \end{cases}$$

Każda z funkcji f i g ma wartość w punkcie $x_0 = 1$. Jest $f(1) = 1$ oraz $g(1) = 1$. Weźmy dowolny ciąg (x_n) taki, że $x_n \to 1$ i $x_n \neq 1$. Jest wówczas

a) $f(x_n) = 3(x_n)^2 - 3x_n$, a zatem $f(x_n) \to 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1$, ponieważ $f(1) = 1$, zatem $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$, czyli funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 = 1$;

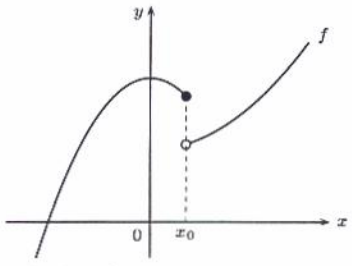
b) $g(x_n) = \frac{(x_n)^2}{1-(x_n)^3} = \frac{(x_n)^2}{(1-x_n)(1+x_n+(x_n)^2}$. Ciąg $(g(x_n))$ nie ma granicy (dlaczego?), a zatem funkcja g nie jest ciągła w punkcie 1.

10.38. Wykaż, że funkcja f określona na zbiorze $\mathbb{R}$ wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{jeśli } x \text{ jest liczbą wymierną}, \\ 0, & \text{jeśli } x \text{ jest liczbą niewymierną}, \end{cases}$$

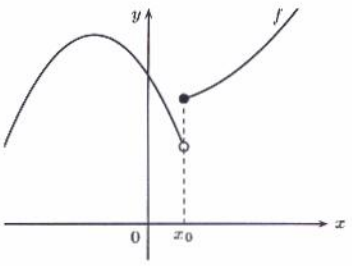
jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$ i tylko w tym punkcie (por. zadanie 10.10).

Definicja 10-21 [FUNKCJA LEWOSTRONNIE CIĄGŁA W PUNKCIE] Funkcję f nazywamy *lewostronnie ciągłą w punkcie* x_0, jeśli $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.



Rys. 177 Funkcja f jest w punkcie x_0 lewostronnie ciągła ale nie jest ciągła w tym punkcie

Definicja 10-22 [FUNKCJA PRAWOSTRONNIE CIĄGŁA W PUNKCIE] Funkcję f nazywamy *prawostronnie ciągłą w punkcie* x_0, jeśli $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

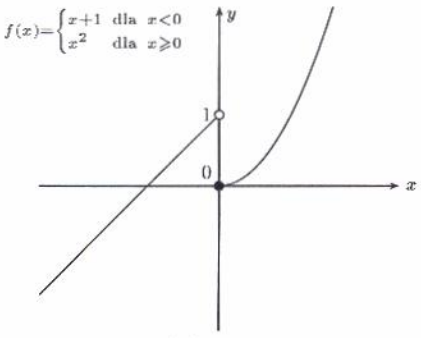


Rys. 178 Funkcja f jest w punkcie x_0 prawostronnie ciągła ale nie jest ciągła w tym punkcie

10.39. Funkcja f jest określona wzorem dwuczłonowym:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla} \quad x < 0, \\ x^2 & \text{dla} \quad x \geqslant 0. \end{cases}$$

Zbadaj ciągłość lewostronną i ciągłość prawostronną funkcji f w punkcie $x_0 = 0$. Czy jest to funkcja ciągła w punkcie $x_0 = 0$?



Rys. 179 Wykres funkcji f, gdzie $f(x) = x + 1$ dla $x < 0$ i $f(x) = x^2$ dla $x \geqslant 0$

10.40. Rozważmy funkcję f zadaną wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2(x-1)}{x-1} & \text{dla} \quad x < 1, \\ 1 \quad \text{dla} \quad x = 1, \\ \frac{x^2(x-1)}{x-1} & \text{dla} \quad x > 1. \end{cases}$$

Udowodnij, że ta funkcja f nie jest ciągła w punkcie $x_0 = 1$.

Twierdzenie 10-9 *Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy jest lewostronnie i prawostronnie ciągła w tym punkcie.*

10.41. Zbadaj w punkcie x_0 ciągłość lewo- i prawostronną oraz ciągłość funkcji f, g i h, gdzie

a) $f(x) = [x]$, gdy $x_0 = 13$ (funkcja *entier*),

b) $g(x) = \begin{cases} \frac{|x-2|}{x^2-4} & \text{dla} \quad x \neq 2, \\ \frac{1}{4} \quad \text{dla} \quad x = 2, \end{cases}$ gdy $x_0 = 2$,

c) $h(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0, \\ 1 \quad \text{dla} \quad x = 0, \end{cases}$ gdy $x_0 = 0$.

10.42. Dla jakich wartości parametru c funkcja

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{dla} \quad |x| \geqslant 1, \\ -x^2 + c & \text{dla} \quad |x| < 1 \end{cases}$$

jest ciągła zarówno w punkcie $x_0 = -1$ jak i w punkcie $x_0 = 1$?

Twierdzenie 10-10 [TWIERDZENIA O CIĄGŁOŚCI SUMY, RÓŻNICY, ILOCZYNU I ILORAZU FUNKCJI CIĄGŁYCH W PUNKCIE] *Jeżeli funkcje f i g określone na tej samej dziedzinie są ciągłe w punkcie x_0, to:*

1) *funkcja $f + g$ jest także ciągła w punkcie x_0,*
2) *funkcja $f - g$ jest także ciągła w punkcie x_0,*
3) *funkcja $f \cdot g$ jest także ciągła w punkcie x_0,*
4) *funkcja $\frac{f}{g}$ jest także ciągła w punkcie x_0, przy założeniu, że $g(x_0) \neq 0$.*

■ Funkcja $h(x) = \frac{1}{x} + 2x^2 - 3x - 1$ jest ciągła w punkcie $x_0 = \pi$, bo jest sumą dwu funkcji ciągłych w tym punkcie: funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ i funkcji $g(x) = 2x^2 - 3x - 1$.

Definicja 10-23 [FUNKCJA CIĄGŁA NA ZBIORZE] Niech $f : D_f \to \mathbb{R}$ i $A \subset D_f$. Funkcję f nazywamy *ciągłą na zbiorze A* jeśli jest ciągła w każdym punkcie zbioru A. Jeśli $A = D_f$, to funkcję ciągłą na zbiorze A nazywamy krótko *funkcją ciągłą*. Funkcja f jest ciągła jeżeli jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny.

Z powyższej definicji wynika, że funkcja f jest ciągła na przedziale (a, b) zawartym w dziedzinie D_f tej funkcji, jeśli funkcja f jest ciągła w każdym punkcie tego przedziału.

Definicja 10-24 [FUNKCJA CIĄGŁA NA PRZEDZIALE] Niech $[a, b] \subset D_f$. Funkcję f nazywamy *ciągłą na przedziale* $[a, b]$, jeśli jest ciągła na przedziale (a, b) oraz prawostronnie ciągła w punkcie $x_0 = a$ oraz lewostronnie ciągła w punkcie $x_0 = b$.

Wykres funkcji ciągłej na przedziale $[a, b]$ jest linią ciągłą.

10.43. Udowodnij, że funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie a, b i c są ustalonymi liczbami rzeczywistymi i $a \neq 0$, jest funkcją ciągłą.

10.44. Udowodnij, że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^4-1}{|x|-1} & \text{dla} \quad |x| \neq 1, \\ 4 & \text{dla} \quad |x| = 1, \end{cases}$$

jest funkcją ciągłą na przedziale $(-\infty, +\infty)$.

10.45. Rozstrzygnij, które z poniższych funkcji są ciągłe:

a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, b) $g(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$, c) $h(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

10.46. Rozważmy funkcję *entier* (cecha), a więc funkcję określoną wzorem $f(x) = [x]$. Zbadaj ciągłość tej funkcji na przedziale $(0, 1)$. Czy ta funkcja f jest ciągła na przedziale $[0, 1]$? Czy ta funkcja f jest ciągła na przedziale $(0, 3)$? Czy jest to funkcja ciągła?

10.47. Rozważmy funkcję *mantysa*, a więc funkcję określoną wzorem $g(x) = x - [x]$. Zbadaj ciągłość tej funkcji na przedziale $(0, 1)$. Czy ta funkcja g jest ciągła na przedziale $[0, 1]$? Czy ta funkcja g jest ciągła na przedziale $(0, 3)$? Czy mantysa jest funkcją ciągłą?

Skorzystaj z rysunku 40 (s. 55), na którym są wykresy funkcji f i g.

10.48. Pozostańmy przy funkcjach $f(x) = [x]$ (cecha) i $g(x) = x - [x]$ (mantysa). Niech $h(x) = f(x) + g(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$. Naszkicuj wykres funkcji h. Rozstrzygnij, czy jest to funkcja ciągła. Czy jest to funkcja elementarna?

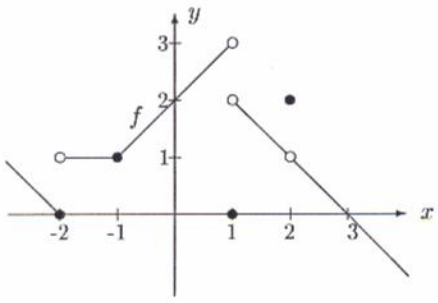
■ Funkcja $f : D_f \to \mathbb{R}$, gdzie $D_f \subset \mathbb{R}$ jest nieciągła w punkcie x_0 jeśli:
— nie istnieje granica funkcji f w punkcie x_0 lub
— nie istnieje wartość funkcji w tym punkcie lub
— granica funkcji w punkcie x_0 nie jest równa $f(x_0)$.

Definicja 10-25 [RODZAJE NIECIĄGŁOŚCI] Mówimy o *nieciągłości I rodzaju funkcji f w punkcie x_0*, ilekroć:
— funkcja f ma obie granice jednostronne w tym punkcie,
— obie te granice są skończone i
— $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) \neq f(x_0)$ lub $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) \neq f(x_0)$.

Jeśli $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$, to mówimy, że w punkcie x_0 istnieje *skok*.

Jeśli $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x) \neq f(x_0)$, to mówimy, że w punkcie x_0 istnieje *luka*.

Mówimy o *nieciągłości II rodzaju funkcji f w punkcie x_0*, jeśli albo jedna z granic jednostronnych w punkcie x_0 nie istnieje, albo jest niewłaściwa.



Rys. 180 Wykres funkcji f

10.49. Wykres funkcji liczbowo-liczbowej jest pewnym „bankiem" informacji o tej funkcji. Na rysunku 180 mamy wykres funkcji f.
a) Odczytaj z tego wykresu przepis na $f(x)$.
b) Znajdź granice lewo- i prawostronne funkcji f w punktach: $a = -2$, $b = -1$, $c = 1$ i $d = 2$. Czy funkcja f ma w tych punktach granice?
c) Rozstrzygnij, czy w tych punktach funkcja f jest ciągła. Jeśli w jakimś punkcie funkcja f nie jest ciągła, to rozstrzygnij jaki jest to rodzaj nieciągłości.
d) Znajdź granice $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ oraz $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

□ Mamy tu: $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = 0$ i $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = 1$, a zatem funkcja f nie jest ciągła w punkcie $a = -2$, bo nie ma w tym punkcie granicy. Jest to nieciągłość I rodzaju. W punkcie $a = -2$ istnieje skok.

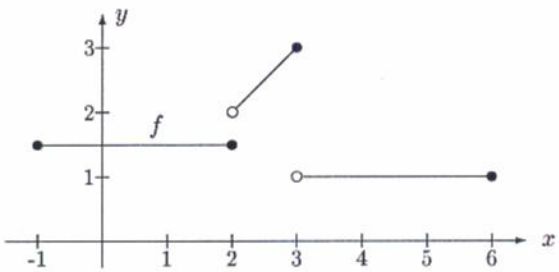
□ W punkcie $d = 2$ funkcja f ma granicę i $\lim\limits_{x\to2} f(x) = 1$, ale $f(2) = 2$, a więc wartość funkcji f w punkcie $d = 2$ i granica funkcji f w punkcie $d = 2$ nie są równe. Funkcja f nie jest ciągła w punkcie $d = 2$. Jest to nieciągłość I rodzaju. W punkcie $d = 2$ istnieje luka.

10.50. Zbadaj ciągłość funkcji f, jeśli: a) $f(x) = \frac{x}{x}$, b) $f(x) = \frac{x}{|x|}$, c) $f(x) = \frac{1}{x}$, d) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, e) $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$, f) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.
Jeśli funkcja f nie ma wartości w pewnym punkcie x_0, to czy można nadać jej w tym punkcie taką wartość (czy można funkcję f dookreślić w tym punkcie x_0), żeby tak rozszerzona, a więc nowa funkcja była w tym punkcie x_0 ciągła?

10.51. Funkcja f określona jest następująco:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{dla} \quad -1 \leqslant x \leqslant 2, \\ x & \text{dla} \quad 2 < x \leqslant 3, \\ 1 & \text{dla} \quad 3 < x \leqslant 6. \end{cases}$$

Zbadaj ciągłość tej funkcji dla każdego $x_0 \in [-1, 6]$.



Rys. 181 Wykres funkcji f z zadania 10.51

10.52. Funkcja f jest określona wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{|x-3|} + x & \text{dla} \quad x \neq 3, \\ 4 & \text{dla} \quad x = 3. \end{cases}$$

Wykaż, że ta funkcja f nie jest ciągła w punkcie $x_0 = 3$. Jakiego rodzaju jest to nieciągłość? Czy można zmienić tak wartość funkcji f w punkcie $x_0 = 3$, aby tak zmieniona, a więc nowa, funkcja stała się ciągłą w tym punkcie?

Funkcja f ma w punkcie $x_0 = 3$ „skok", bo granice jednostronne funkcji f w tym punkcie są różne. Nieciągłość tej funkcji w punkcie $x_0 = 3$ nie jest zatem usuwalna.

10.53. Znajdź takie a i c, aby funkcja f, gdzie

$$f(x) = \begin{cases} ax + 3 & \text{dla} \quad x < 1, \\ 2x^2 + x + c & \text{dla} \quad x \geqslant 1, \end{cases}$$

była ciągła w punkcie $x_0 = 1$.

10.54. Wykaż, że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x \text{ wymiernych}, \\ 0 & \text{dla} \quad x \text{ niewymiernych}, \end{cases}$$

jest ciągła tylko w punkcie $x_0 = 0$. Jakiego rodzaju jest nieciągłość funkcji f w punkcie $x_0 = 1$? A w punkcie $x_0 = \pi$?

10.55. Dla jakich wartości parametrów b i c jest ciągła funkcja f, gdzie

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad |x| \leqslant 1, \\ x^2 + bx + c & \text{dla} \quad |x| > 1? \end{cases}$$

10.56. Rozstrzygnij, w jakich punktach nie jest ciągła funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2+x-2} & \text{dla} \quad x \neq -2 \ i \ x \neq 1, \\ \frac{1}{3} & \text{dla} \quad x = 1, \\ 0 & \text{dla} \quad x = -2. \end{cases}$$

Jakiego rodzaju jest to nieciągłość?

10.57. Znajdź punkty nieciągłości funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{dla} \quad x \leqslant 0, \\ \frac{1}{x} & \text{dla} \quad 0 < x < 1, \\ x - 1 & \text{dla} \quad x \geqslant 1. \end{cases}$$

Jakiego rodzaju jest to nieciągłość?

Z twierdzenia 10-10 (s. 214) wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie 10-11 [TWIERDZENIA O CIĄGŁOŚCI SUMY, RÓŻNICY, ILOCZYNU I ILORAZU FUNKCJI CIĄGŁYCH] *Jeżeli funkcje f i g określone na tym samym zbiorze są ciągłe, to: ciągłe są także funkcje: $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ i $\frac{f}{g}$, przy założeniu, że $g(x) \neq 0$.*

■ Funkcja $h(x) = e^x + x^2 + 2x - 1$ jest ciągła, bo jest sumą dwu funkcji: $f(x) = e^x$ i $g(x) = x^2 + 2x - 1$ a funkcje g i h są ciągłe.

■ Funkcja $h(x) = \operatorname{tg} x$ jest ilorazem funkcji $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \cos x$. Funkcje f i g są ciągłe. Funkcja tangens jest zatem ciągła w każdym punkcie z wyjątkiem nieparzystych wielokrotności liczby $\frac{\pi}{2}$, bo w tych punktach funkcja g ma wartość 0, a więc funkcja f nie ma wartości.

■ Rozważmy dwie funkcje f i g ze zbioru $\mathbb{R}$ w zbiór $\mathbb{R}$, gdzie:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{dla} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{dla} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

Funkcja f jest funkcją Dirichleta określoną na s. 51. Ta funkcja nie jest ciągła w żadnym punkcie, bo w żadnym punkcie nie posiada granicy (por. zadanie 10.9). Funkcja g także nie posiada granicy w żadnym punkcie, a więc nie jest ciągła. Suma funkcji f i g jest funkcją h określoną wzorem $h(x) = 1$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, a więc jest funkcją

ciągłą. Nie jest zatem prawdziwa implikacja: *„jeżeli funkcje f i g są nieciągłe, to ich suma jest funkcją nieciągłą"*.

Twierdzenie 10-12 [TWIERDZENIE O CIĄGŁOŚCI FUNKCJI ZŁOŻONEJ] *Jeżeli funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 i funkcja g jest ciągła w punkcie $y_0 = f(x_0)$, to funkcja złożona $g(f)$ jest ciągła w punkcie x_0.*

Twierdzenie 10-13 [TWIERDZENIE O MONOTONICZNOŚCI FUNKCJI CIĄGŁEJ I RÓŻNOWARTOŚCIOWEJ] *Załóżmy, że funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$. Taka funkcja f jest różnowartościowa na przedziale $[a, b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest albo malejąca albo rosnąca na tym przedziale.*

Twierdzenie 10-14 [TWIERDZENIE WEIERSTRASSA[18] O OGRANICZONOŚCI FUNKCJI CIĄGŁEJ] *Jeżeli funkcja f jest ciągła na właściwym przedziale domkniętym* (*por. s. 22*), *to funkcja f jest ograniczona.*

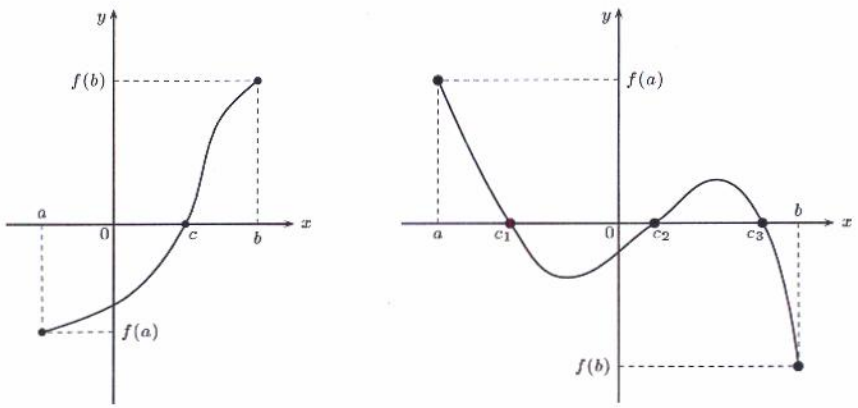
Założenie, że f jest funkcją ciągłą na przedziale domkniętym jest istotne, bo:

- funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest ciągła na przedziale $(0, 1]$ a nie jest na tym przedziale ograniczona;
- funkcja $g(x) = \operatorname{tg} x$ jest na przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ciągła, ale nie jest na tym przedziale ograniczona.

Twierdzenie 10-15 [TWIERDZENIE DARBOUX[19] O PRZYJMOWANIU WARTOŚCI POŚREDNICH] *Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$ oraz spełnia warunek $f(a) < f(b)$ albo warunek $f(a) > f(b)$, to dla każdego y_0 leżącego między $f(a)$ a $f(b)$ istnieje takie x_0 w przedziale (a, b), że $f(x_0) = y_0$.*

10.58. Dana jest funkcja $f(x) = 2^x - x^2$. Udowodnij, że w przedziale $(1, 3)$ istnieje taki punkt x_0, że $f(x_0) = \frac{1}{10}$.

Twierdzenie 10-16 *Funkcja ciągła na przedziale domkniętym osiąga w tym przedziale swoją wartość najmniejszą i swoją wartość największą oraz każdą pośrednią między tymi dwiema.*



Rys. 182 Twierdzenie Darboux o miejscach zerowych funkcji ciągłej a jej wykres

[18] Karl Fridrich Weierstrass (1815-1897), matematyk niemiecki.

[19] Jean Gaston Darboux (1842-1917), matematyk francuski.

Twierdzenie 10-17 [TWIERDZENIE DARBOUX O MIEJSCACH ZEROWYCH FUNKCJI] *Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale domkniętym $[a,b]$ oraz na krańcach tego przedziału wartości funkcji f są różnych znaków, czyli spełniony jest warunek $f(a) \cdot f(b) < 0$, to istnieje w przedziale (a,b) taki punkt x_0, że $f(x_0) = 0$.*

Pierwiastkiem równania $f(x) = 0$ nazywamy każdą liczbę x_0 z dziedziny funkcji f, dla której zachodzi równość $f(x_0) = 0$ (por. s. ??). Pierwiastek równania $f(x) = 0$ jest zarazem miejscem zerowym funkcji f.

10.59. Udowodnij, że funkcja $f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 6x - 2$ jest funkcją ciągłą. Wykaż, że równanie $x^4 + 3x^3 - x^2 - 6x - 2 = 0$ ma pierwiastek w przedziale $(1,2)$.

□ Zauważ, że $f(1) = -5$ oraz $f(2) = 22$. Z twierdzenia Darboux o miejscach zerowych funkcji ciągłej wynika, że w przedziale $(1,2)$ istnieje x_0, dla którego $f(x_0) = 0$.

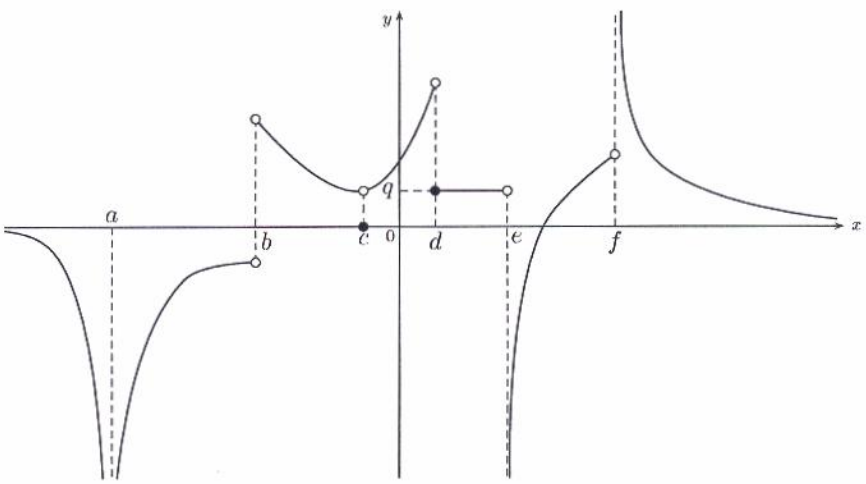
10.60. Pozostańmy przy funkcji $f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 6x - 2$. Jest $[\frac{14}{10}, \frac{15}{10}] \subset (1,2)$.
a) Sprawdź, że $f(\frac{14}{10}) < 0$ i $f(\frac{15}{10}) > 0$. Jaki stąd wynika wniosek na temat pierwiastka równania $f(x) = 0$ na przedziale $(1,2)$?
b) Sprawdź, że $f(\frac{141}{100}) < 0$ i $f(\frac{142}{100}) > 0$. Jaki kolejny wniosek wynika z tego faktu na temat wspomnianego pierwiastka równania $f(x) = 0$?
c) Opisz ideę szacowania tego pierwiastka, jaką podsuwa to zadanie.

10.61. Dana jest funkcja $f(x) = \ln x + x - 2$. Wykaż, że w przedziale $(1,2)$ istnieje pierwiastek równania $\ln x - x - 2 = 0$.

10.62. Udowodnij, że:
a) równanie $x^4 = 4^x$ ma pierwiastek w przedziale $(-\infty, 0)$,
b) równanie $x2^x = 1$ ma pierwiastek w przedziale $(0, +\infty)$.

10.63. Udowodnij, że
a) funkcja $f(x) = x^5 - 5x - 1$ jest ciągła oraz że
b) równanie $x^5 - 5x - 1 = 0$ ma co najmniej jeden pierwiastek.

Zauważ, że $f(1) = -5 < 0$ i $f(2) = 21 > 0$.



Rys. 183 Wykres pewnej funkcji liczbowo-liczbowej f

10.64. Na rysunku 183 przedstawiony jest wykres funkcji liczbowo-liczbowej f. Zbadaj ciągłość tej funkcji w punktach a, b, c, d, e oraz f. W przypadku, gdy w którymś z tych punktów funkcja f nie jest ciągła, rozstrzygnij jaki jest tego powód.

10.65. Funkcję $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} \cdot + a_1 x^1 + a_0$ ze zbioru $\mathbb{R}$ w zbiór $\mathbb{R}$, gdzie $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ są ustalonymi liczbami rzeczywistymi i $a_n \neq 0$, nazywamy wielomianem stopnia n (zob. s. 80). Wykaż, że jeśli stopień wielomianu jest liczbą nieparzystą, to taki wielomian ma co najmniej jedno miejsce zerowe.

10.66. Wykaż, że funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{|x-2|} + x & \text{dla} \quad x \neq 2, \\ 1 \quad \text{dla} \quad x = 2, \end{cases}$$

nie jest ciągła w punkcie $x_0 = 2$. Jaki to typ nieciągłości?

10.67. Dana jest funkcja f ze zbioru $\mathbb{R}$ w zbiór $\mathbb{R}$, gdzie

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^4-1}{|x|-1} & \text{dla} \quad x \neq -1 \quad \text{i} \quad x \neq 1, \\ 4 \quad \text{dla} \quad x \in \{-1, 1\}. \end{cases}$$

Wykaż, że jest to funkcja ciągła.

10.68. Rozstrzygnij, czy są ciągłe funkcje f i g, gdzie

$f(x) = \frac{|x|+x}{x^2}$ dla $x \neq 0$ i $f(0) = 0$ oraz $g(x) = sgn[x(x-1)]$ dla $x \in \mathbb{R}$.

10.69. Rozstrzygnij, czy jest ciągła funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{|x^2-1|} & \text{dla} \quad |x| \neq 1, \\ 0 \quad \text{dla} \quad x = -1, \\ \frac{3}{2} \quad \text{dla} \quad x = 1. \end{cases}$$

Jeśli funkcja f nie jest ciągła w pewnym punkcie, to rozstrzygnij, jakiego typu jest to nieciągłość.

10.70. Wykaż, że równanie $e^x = \frac{1}{x}$ ma pierwiastek w przedziale $(\frac{1}{2}, 1)$.

11. Rachunek różniczkowy

11.1. Pochodna funkcji w punkcie

Załóżmy, że funkcja liczbowo-liczbowa f jest określona na przedziale liczbowym (a, b), że $x_0 \in (a, b)$ oraz $x_1 = x_0 + \Delta x \in (a, b)$. Różnicę $(x_1 - x_0)$ nazywamy *przyrostem argumentu* x i oznaczamy Δx. Różnicę $[f(x_1) - f(x_0)]$, tj. różnicę $[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)]$ oznaczamy przez Δf i nazywamy *przyrostem funkcji*.

Definicja 11-1 [ILORAZ RÓŻNICOWY] Iloraz $\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ nazywamy *ilorazem różnicowym funkcji f w punkcie x_0* i oznaczamy $\frac{\Delta f}{\Delta x}$. Jest on funkcją zmiennej Δx.

Definicja 11-2 [POCHODNA FUNKCJI W PUNKCIE] Jeżeli iloraz różnicowy $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ ma granicę skończoną, gdy Δx zdąża do zera, to tę granicę nazywamy *pochodną funkcji f w punkcie x_0* i oznaczamy przez $f'(x_0)$. Mamy więc

$$(*) \qquad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Jeżeli funkcja f ma pochodną w punkcie x_0, to mówimy, że funkcja f jest *różniczkowalna w tym punkcie*. Jeżeli granica, o której mowa w $(*)$ nie istnieje, albo jest niewłaściwa, to mówimy, że funkcja f *nie jest różniczkowalna w punkcie* x_0.

Obliczanie pochodnej funkcji nazywamy *różniczkowaniem*. Dział matematyki zajmujący się twierdzeniami o pochodnej nazywa się *rachunkiem różniczkowym*. Symbol $f'(x_0)$ pochodzi od Lagrange'a[20].

11.1. Oblicz z definicji pochodną funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie $x_0 = 2$. Wykaż, że dla każdego $x_0 \in \mathbb{R}$ jest $f'(x_0) = 2x_0$.

□ Mamy tu $\Delta f = (2 + \Delta x)^2 - 2^2 = 4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 4 = 4\Delta x + (\Delta x)^2$, czyli

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{4\Delta x - (\Delta x)^2}{\Delta x} = 4 + \Delta x,$$

a zatem

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [4 + \Delta x] = 4.$$

Jest więc $f'(2) = 4$.

11.2. Dowodzi się, że $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Korzystając z tego faktu oraz z tożsamości $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$, udowodnij, że dla każdego $x_0 \in \mathbb{R}$ istnieje pochodna funkcji $f(x) = \sin x$ w punkcie x_0 i że $f'(x_0) = \cos x_0$.

11.3. Dana jest funkcja $f(x) = |x|$. Korzystając z definicji pochodnej funkcji w punkcie udowodnij, że funkcja f nie posiada pochodnej w punkcie $x_0 = 0$. Znajdź pochodną tej funkcji f w dowolnym punkcie $x_0 \neq 0$.

□ Mamy $f(0 + \Delta x) = |\Delta x|$, $f(0 + \Delta x) - f(0) = |\Delta x| - 0 = |\Delta x|$, a więc

$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

Jeżeli $\Delta x < 0$ i $\Delta x \to 0$, to iloraz $\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ zdąża do -1. Jeśli $\Delta x > 0$ i $\Delta x \to 0$, to iloraz $\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ zdąża do $+1$. Granica lewostronna ilorazu różnicowego jest różna od granicy

[20] Joseph Louis Lagrange (1736-1813), matematyk francuski.

prawostronnej, a zatem ten iloraz różnicowy nie ma w punkcie 0 granicy. Funkcja $f(x) = |x|$ nie jest zatem różniczkowalna w punkcie $x_0 = 0$.

11.4. Rozstrzygnij, czy w punkcie x_0 funkcja f posiada pochodną, jeśli:

a) $f(x) = |x-2|$ i $x_0 = 2$,

b) $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$ oraz $x_0 = 0$,

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$ oraz $x_0 = 0$.

□ Rozważmy funkcję f z zadania 11.4b. Iloraz różnicowy tej funkcji f w punkcie $x_0 = 0$ jest postaci

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta x \sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \sin\frac{1}{\Delta x}.$$

Wykażemy, że nie istnieje granica tego ilorazu, gdy $\Delta x \to 0$. Rozważmy dwa ciągi

$$\Delta^1 x_n = \frac{1}{n\pi} \quad \text{oraz} \quad \Delta^2 x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}.$$

Nietrudno sprawdzić, że

$$\lim_{n\to+\infty} \sin\frac{1}{\Delta^1 x_n} = 0 \neq 1 = \lim_{n\to+\infty} \sin\frac{1}{\Delta^2 x_n},$$

a więc nie istnieje granica ilorazu różnicowego funkcji f w punkcie 0. Funkcja f nie jest zatem różniczkowalna w punkcie $x_0 = 0$.

11.5. Dla jakiego rzeczywistego a jest różniczkowalna funkcja f, gdzie

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leqslant 1, \\ ax - 1 & \text{dla } x > 1. \end{cases}$$

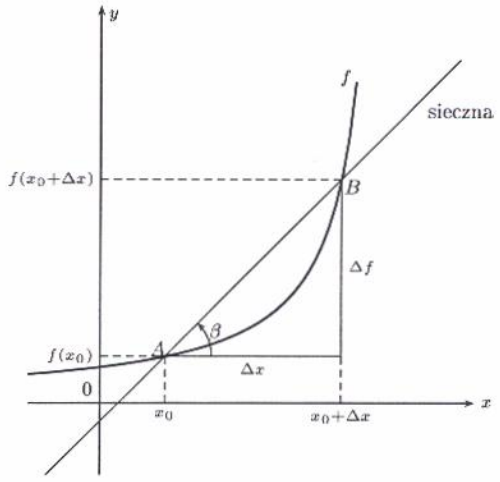
11.2. Geometryczna i fizyczna interpretacja pochodnej

[GEOMETRYCZNA INTERPRETACJA POCHODNEJ FUNKCJI W PUNKCIE] Rozważmy wykres funkcji f oraz dwa jego punkty: $A=(x, f(x_0))$ i $B=(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$. Prosta wyznaczona przez te punkty nazywa się *sieczną*. Przy ustalonym Δx i x_0 iloraz różnicowy $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ jest liczbą. Jest ona tangensem kąta β, pod jakim ta sieczna jest nachylona do dodatniej półosi odciętych (por. rysunek 184). Tangens wspomnianego kąta nazywa się *współczynnikiem kierunkowym* tej siecznej.

Jeśli $\Delta x \to 0$, to punkt B zmierza do punktu A a kąt β zdąża do kąta α, którego tangens jest współczynnikiem kierunkowym szczególnej prostej, zwanej styczną do wykresu funkcji f w punkcie A. Jest więc

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha.$$

W sensie geometrycznym wartość pochodnej funkcji f w punkcie x_0 jest tangensem kąta, jaki tworzy styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ z dodatnią półosią odciętych. Znając pochodną funkcji f w punkcie x_0 możemy wspomnianą styczną zadać równaniem $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Rozumiemy to równanie z dwiema niewiadomymi x i y tak, że każda para (x, y), która jest pierwiastkiem owego równania przedstawia parę współrzędnych punktu leżącego na wspomnianej stycznej i każdy punkt, który leży na tej stycznej ma współrzędne spełniające to równanie.



Rys. 184 Iloraz różnicowy jako tangens kąta β nachylenia siecznej do osi odciętych

11.6. Dana jest funkcja $f(x) = x^2 - x - 1$. Napisz równanie stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie $A = (1, -1)$. Znajdź punkt na wykresie funkcji f, w którym styczna do wykresu jest nachylona do dodatniej półosi odciętych pod kątem $\frac{\pi}{4}$. Znajdź taki punkt na wykresie funkcji f, w którym styczna do wykresu jest równoległa do osi odciętych.

11.7. Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = e^x$ w punkcie $x_0 = 0$.

11.8. Wiadomo, że wykres funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + x + c$ przechodzi przez punkt o współrzędnych $(1, 5)$ i prosta o równaniu $y = 2x + 3$ jest styczna do wykresu w tym punkcie. Określ tę funkcję, tj. podaj wzór na $f(x)$.

[FIZYCZNA INTERPRETACJA POCHODNEJ FUNKCJI W PUNKCIE] Załóżmy, że ciało porusza się po prostej drodze oraz, że między drogą s przebytą a czasem t, w którym ta droga zostaje przebyta, zachodzi zależność $s = f(t)$. Droga jest więc funkcją czasu. Załóżmy, że ruch rozpoczyna się w punkcie 0. W czasie t_0 ciało przebyło drogę $s_0 = f(t_0)$ a w czasie $t_0 + \Delta t$ przebyło drogę $s_1 = f(t_0 + \Delta t)$. W odstępie czasu Δt ciało przebyło więc drogę $\Delta s = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$. Iloraz

$$\frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

określa tzw. *prędkość średnią* ciała na odcinku drogi $\Delta s = s_1 - s_0$. Granicę

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

nazywa się w fizyce *prędkością chwilową ciała w chwili* t_0. Z matematycznego punktu widzenia ta prędkość chwilowa jest pochodną funkcji f w punkcie t_0, a więc pochodną drogi względem czasu w danej chwili.

11.9. Cząstka porusza się po osi odciętych. Droga s (wyrażona w centymetrach) jest funkcją czasu (wyrażonego w sekundach) zadaną wzorem $s(t) = 3t - t^2$. Określ prędkość w chwilach $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ i $t_2 = 2$.

11.3. Różniczkowalność funkcji w punkcie a jej ciągłość w tym punkcie

Twierdzenie 11-1 [RÓŻNICZKOWALNOŚĆ FUNKCJI A JEJ CIĄGŁOŚĆ] *Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0, to jest w tym punkcie ciągła.*

Dowód: Jest $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta x\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, a zatem

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=\lim_{\Delta x\to 0}[\Delta x\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}]=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=0\cdot f'(x_0)=0,$$

czyli $\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$, a to oznacza, że $\lim_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$.

Ostatni warunek orzeka, że funkcja f jest ciągła w punkcie x_0.

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Funkcja $f(x)=|x|$ jest ciągła w punkcie $x_0=0$ a – jak wynika z rozwiązania zadania 11.3 – nie jest różniczkowalna w tym punkcie. Ciągłość funkcji w punkcie jest zatem warunkiem koniecznym ale nie wystarczającym na to, aby funkcja była różniczkowalna w tym punkcie.

Z twierdzenia 11-1 wynika, że prawdziwa jest implikacja:

jeśli funkcja f nie jest ciągła w punkcie x_0, to nie jest w tym punkcie różniczkowalna.

■ Funkcja Dirichleta nie jest w żadnym punkcie różniczkowalna, bo w żadnym punkcie nie jest ciągła.

■ Zbadajmy różniczkowalność funkcji f w punkcie $x_0=0$, gdzie

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x} & \text{dla} \quad x\neq 0,\\ 1 & \text{dla} \quad x=0.\end{cases}$$

Nietrudno wykazać, że ta funkcja w punkcie $x_0=0$ nie ma granicy, a zatem nie jest ciągła w tym punkcie. Z nieciągłości funkcji f w punkcie $x_0=0$ wynika, że w tym punkcie nie istnieje jej pochodna.

■ Z rozwiązania zadania 11.4 wynika, że funkcja

$$f(x)=\begin{cases}x\cdot\sin\frac{1}{x} & \text{dla} \quad x\neq 0,\\ 0 \quad \text{dla} & x=0\end{cases}$$

nie jest różniczkowalna w punkcie $x_0=0$. Na s. 197 wykazaliśmy, że $\lim_{x\to 0}x\cdot\sin\frac{1}{x}=0$, a to oznacza, że funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0=0$. Ciągłość funkcji w punkcie nie jest warunkiem wystarczającym do jej różniczkowalności w tym punkcie.

11.4. Pochodna jako nowa funkcja – twierdzenia o pochodnej

Definicja 11-3 [POCHODNA JAKO NOWA FUNKCJA] Jeżeli funkcja $f: D_f \longrightarrow Y$ jest różniczkowalna w każdym punkcie swojej dziedziny, to funkcję f nazywamy *różniczkowalną*. Mamy wówczas określoną nową funkcję, która punktowi $x_0\in D_f$ przypisuje pochodną funkcji f w tym punkcie, a więc liczbę $f'(x_0)$. Tę nową funkcję nazywamy *pochodną funkcji* f i oznaczamy przez f'.

Z rozwiązania zadania 11.1 wynika zatem, że jeżeli $f(x) = x^2$, to $f'(x) = 2x$. Ostatni fakt zapisujemy krócej: $(x^2)' = 2x$. Z rozwiązania zadania 11.2 wynika, że jeśli $f(x) = \sin x$, to $f'(x) = \cos x$, czyli krócej $(\sin x)' = \cos x$.

11.10. Funkcja f zadana jest wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \textit{ wymiernych}, \\ x^3 & \text{dla } x \textit{ niewymiernych}. \end{cases}$$

Funkcja f jest określona na przedziale $(-\infty, +\infty)$. Wykaż, że ta funkcja f ma pochodną w punkcie $x_0 = 0$ i że jest to jedyny punkt, w którym funkcja f jest różniczkowalna.

Zauważ, że funkcja f jest ciągła jedynie w punkcie $x_0 = 0$. W żadnym punkcie x_0 różnym od zera ta funkcja f nie może być różniczkowalna, bo nie jest ciągła.

W poniższej tabeli zebrano pochodne niektórych funkcji elementarnych.

funkcja	*pochodna tej funkcji*
$f(x) = c$ (funkcja stała)	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax + b$ (funkcja liniowa)	$f'(x) = a$
$f(x) = x^\alpha$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = a^x$ ($a > 0$ i $a \neq 1$ – funkcja wykładnicza)	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \log_a x$ ($a > 0$ i $a \neq 1$ – funkcja logarytmiczna)	$f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \operatorname{ctg} x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

11.11. Udowodnij, że jeśli $f(x) = c$, gdzie c jest ustaloną liczbą rzeczywistą, to $f'(x) = 0$, czyli że pochodna funkcji stałej jest funkcją tożsamościowo równą 0.

Twierdzenie 11-2 [TWIERDZENIE O POCHODNEJ SUMY] *Jeżeli funkcje g i h są określone na tym samym zbiorze i każda ma pochodną w punkcie x_0, to suma tych funkcji ma także pochodną w punkcie x_0 i pochodna sumy $g + h$ w punkcie x_0 jest równa sumie pochodnych funkcji g i funkcji h w tym punkcie. Jeśli więc funkcje g i h są różniczkowalne i $f(x) = g(x) + h(x)$, to funkcja f jest także różniczkowalna i $f'(x) = g'(x) + h'(x)$, albo krócej: $[g(x) + h(x)]' = g'(x) + h'(x)$.*

Dowód: Mamy:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{[g(x + \Delta x) + h(x + \Delta x)] - [g(x) + h(x)]}{\Delta x} =$$

$$= \frac{[g(x + \Delta x) - g(x)] + [h(x + \Delta x) - h(x)]}{\Delta x} = \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}.$$

Z założenia istnieją pochodne funkcji g i h w punkcie x, a zatem

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=g'(x) \text{ i } \lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}=h'(x).$$

Z twierdzenia o granicy sumy dwu funkcji wynika zatem, że

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x},$$

a to oznacza, że $f'(x)=g'(x)+h'(x)$.

11.12. Korzystając z twierdzenia 11-2 i rozwiązania wcześniejszych zadań, oblicz pochodną funkcji $f(x)=x^2+\sin x$.

Twierdzenie 11-3 [TWIERDZENIE O POCHODNEJ RÓŻNICY] *Jeśli funkcje g i h są różniczkowalne i $f(x)=g(x)-h(x)$, to funkcja f jest także różniczkowalna i*
$$f'(x)=g'(x)-h'(x), \text{ albo krócej: } [g(x)-h(x)]'=g'(x)-h'(x).$$

11.13. Wykres funkcji $f(x)=2x^3-9x^2+12x+1$ jest pewną krzywą. Wyznacz na tej krzywej takie punkty, w których styczna jest równoległa do osi odciętych.

□ Z geometrycznej interpretacji pochodnej wynika, że odcięte poszukiwanych w zadaniu punktów mają tę własność, że pochodna funkcji f jest w każdym z tych punktów równa 0. Poszukujemy więc miejsc zerowych pochodnej funkcji f. Mamy $f'(x)=6x^2-18x+12$, a zatem szukamy pierwiastków równania $6x^2-18x+12=0$. Są nimi liczby $x_1=1$ oraz $x_2=2$. Są zatem dwa punkty na wykresie funkcji f, w których styczna do wykresu jest równoległa do osi odciętych: $A=(1,6)$ oraz $B=(2,5)$.

Twierdzenie 11-4 [TWIERDZENIE O POCHODNEJ ILOCZYNU] *Jeżeli funkcje g i h są określone na tym samym zbiorze i każda ma pochodną w punkcie x_0, to iloczyn tych funkcji ma także pochodną w punkcie x_0 i pochodna iloczynu $g\cdot h$ w punkcie x_0 jest równa sumie $g'(x_0)\cdot h(x_0)+g(x_0)\cdot h'(x_0)$. Jeśli więc funkcje g i h są różniczkowalne i $f(x)=g(x)\cdot h(x)$, to funkcja f jest także różniczkowalna i*
$$f'(x)=g'(x)\cdot h(x)+g(x)\cdot h'(x),$$
albo krócej:
$$[g(x)\cdot h(x)]'=g'(x)\cdot h(x)+g(x)\cdot h'(x).$$

Z twierdzenia 11-4 wynika, że

jeżeli $f(x)=c\cdot g(x)$, to $f'(x)=c\cdot g'(x)$, czyli $[c\cdot g(x)]'=c\cdot g'(x)$.

Istotnie, mamy $[c\cdot g(x)]'=0\cdot g(x)+c\cdot g'(x)=c\cdot g'(x)$.

11.14. Oblicz pochodną funkcji $f(x)=(x^2+5)(x^2+2x+1)$.

Twierdzenie 11-5 [TWIERDZENIE O POCHODNEJ ILORAZU] *Jeżeli funkcje g i h są określone na tym samym zbiorze, $h(x)\neq 0$, każda ma pochodną w punkcie x_0 i $h'(x_0)\neq 0$, to funkcja $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ ma także pochodną w punkcie x_0 i pochodna ilorazu $\frac{g}{h}$ w punkcie x_0 jest równa ilorazowi*

$$\frac{g'(x_0)\cdot h(x_0)-g(x_0)\cdot h'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Jeśli więc funkcje g i h są różniczkowalne i $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, to funkcja f jest także różniczkowalna i

$$f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[g(x)]^2},$$

albo krócej:

$$[\frac{g(x)}{h(x)}]' = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[g(x)]^2}.$$

11.15. Oblicz pochodną funkcji $f(x) = \frac{3x^2}{4x^2-1}$.

Twierdzenie 11-6 [POCHODNA FUNKCJI ZŁOŻONEJ] *Niech $f(x) = g(h(x))$. Funkcja f jest zatem funkcją złożoną, funkcja h jest funkcją wewnętrzną, funkcja g – funkcją zewnętrzną. Jeżeli funkcja h ma pochodną w punkcie x_0 a funkcja g ma pochodną w punkcie $h(x_0)$, to funkcja f ma pochodną w punkcie x_0 i $f'(x_0) = g'(h(x_0)) \cdot h'(x_0)$, czyli krócej: $[g(h(x))]' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$.*

■ Rozważmy funkcję $f(x) = (2x^3 + 5)^2$. Jest to funkcja złożona, przy czym wewnętrzną jest funkcja $h(x) = 2x^3 + 5$, zewnętrzną zaś funkcja $g(x) = x^2$. Mamy tu $h'(x) = 6x^2$. Z twierdzenia 11-6 wynika, że

$$f'(x) = 2(2x^3 + 5) \cdot 2 \cdot 3 \cdot x^2 = 24x^5 + 60x^2.$$

Ale pochodną funkcji f można obliczyć inaczej, przedstawiając $f(x)$ jako wielomian (a więc wykonując w przepisie na $f(x)$ odpowiednie działania). Sprawdź, że

$$f(x) = 4x^6 + 20x^3 + 25,$$

a zatem na podstawie twierdzenia o pochodnej sumy dostajemy, że

$$f'(x) = (4x^6 + 20x^3 + 25)' = 24x^5 + 60x^2.$$

11.16. Dla każdej z poniższych funkcji oblicz pochodną:
a) $f(x) = x^4 + 5x^2 - \frac{1}{x} + \sqrt{x}$ dla $x \in (0, +\infty)$, b) $g(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$, c) $h(x) = \frac{e^x+\sin x}{e^x+13}$.

11.17. Oblicz pochodną funkcji f jeśli:
a) $f(x) = \sin^2 x$, b) $f(x) = (3x^2 + \sqrt{2})^5$,
c) $f(x) = (\frac{x^2-1}{x^4+1})^3$, d) $f(x) = \sin(x^2 + 3x - 13)$.

11.18. Oblicz pochodną funkcji f, gdy:
a) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ b) $f(x) = \ln \frac{5-4x}{3+7x}$, c) $f(x) = \ln x(3e^x + 13)$,
d) $f(x) = \ln(\ln x))$, e) $f(x) = \ln \frac{(x-1)^2(1-2x)^3}{(x^2-2)^2}$, f) $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$.

11.19. W którym punkcie styczna do wykresu funkcji $f(x) = x^2 - 7x + 3$ jest równoległa do prostej $5x + y - 3 = 0$?

11.20. Droga s przebywana na osi odciętych przez cząstkę jest funkcją czasu t określoną wzorem $s(t) = 3t - t^3$. Określ prędkości tej cząstki w chwilach: $t_0 = 0$, $t_0 = 1$ i $t_0 = 2$, gdzie s wyraża się w centymetrach, t zaś w sekundach.

11.21. Funkcje g i h są różniczkowalne. Obliczyć pochodną funkcji f, gdy

a) $f(x) = \operatorname{tg}[g(x) \cdot h(x)]$,

b) $f(x) = g(x) \cdot \sin[\frac{g(x)}{h(x)+2x}]$.

11.22. Dla jakich wartości parametrów a, b i c funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$ spełnia układ warunków: $f(3) = 0$ i $f(0) = 2$ i $f'(4) = 1$?

11.5. Reguły de L'Hospitala

Przy obliczaniu granicy funkcji f w punkcie x_0 za pomocą twierdzeń stajemy przed problemem istnienia tej granicy w sytuacji, gdy funkcja f jest ilorazem dwu funkcji i granica każdej jest w punkcie x_0 albo zerem albo nieskończonością. Do rozstrzygania istnienia granicy takiego ilorazu funkcji stosuje się twierdzenia, zwane *regułami De L'Hospitala*[21].

Definicja 11-4 [NIEOZNACZONOŚĆ $\frac{0}{0}$] Jeżeli $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, przy czym $g(x) \neq 0$ dla $x \in S(x_0, \delta)$, to $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ nazywamy *symbolem nieoznaczonym* $\frac{0}{0}$.

Definicja 11-5 [NIEOZNACZONOŚĆ $\frac{\infty}{\infty}$] Jeżeli $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, gdzie $g(x) \neq 0$ dla $x \in S(x_0, \delta)$, to $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ nazywamy *symbolem nieoznaczonym* $\frac{\infty}{\infty}$.

Twierdzenie 11-7 [REGUŁA DE L'HOSPITALA DLA NIEOZNACZONOŚCI $\frac{0}{0}$] *Jeżeli funkcje f i g są różniczkowalne w punkcie x_0 oraz $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, przy czym $g(x) \neq 0$ dla $x \in S(x_0, \delta)$ oraz istnieje granica w sensie szerszym (tj. skończona lub $-\infty$ lub $+\infty$) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, to*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Twierdzenie 11-8 [REGUŁA DE L'HOSPITALA DLA NIEOZNACZONOŚCI $\frac{\infty}{\infty}$] *Jeżeli funkcje f i g są różniczkowalne w punkcie x_0 oraz $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, przy czym $g(x) \neq 0$ dla $x \in S(x_0, \delta)$ oraz istnieje granica w sensie szerszym $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, to*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Powyższe twierdzenia są prawdziwe także w przypadku, gdy granice w punkcie x_0 są jednostronne oraz w przypadku, gdy $x_0 = +\infty$ lub $x_0 = -\infty$.

[21] Guillaume Francois Antoine de L'Hôspital (1661-1704), matematyk francuski.

■ Mamy np. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(6x)'}{(e^x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6}{e^x}=0.$

11.23. Oblicz granicę $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x^2+x-1}{3x^3-x^2-x-3}$.

Granica ta jest symbolem nieoznaczonym postaci $\frac{\infty}{\infty}$. Mamy

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x^2+x-1}{3x^3-x^2-x-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+4x+1}{9x^2-2x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x+4}{18x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8}{18}=\frac{1}{3}.$$

11.24. Korzystając z reguły de L'Hospitala oblicz następujące granice:

a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}$, b) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}$, c) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}$,

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+1}{4x^3+2}$, e) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\ln x}{x+\ln x}$, f) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x+1}{x^3}$.

11.25. Oblicz:

a) $\lim\limits_{x\to0+}x\ln x$, b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-e^x)$, c) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-x}$, d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{e^x}$, e) $\lim\limits_{x\to0+}[\ln x+\frac{1}{x^2}]$.

11.6. Ekstrema lokalne funkcji

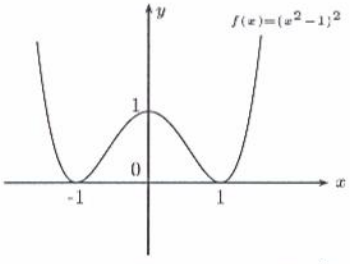
Jeżeli funkcja f nie jest monotoniczna, to w dostatecznie małych przedziałach mogą istnieć punkty, w których wartości funkcji są największe albo najmniejsze.

Definicja 11-6 [MAKSIMUM LOKALNE] Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 *maksimum lokalne*, jeśli istnieje sąsiedztwo $S(x_0,\epsilon)$, że dla każdego $x\in S(x_0,\epsilon)$ zachodzi nierówność $f(x)<f(x_0)$.

Definicja 11-7 [MINIMUM LOKALNE] Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 *minimum lokalne*, jeśli istnieje sąsiedztwo $S(x_0,\epsilon)$, że dla każdego $x\in S(x_0,\epsilon)$ zachodzi nierówność $f(x)>f(x_0)$.

11.26. Wykaż, że funkcja $f(x)=(x^2-1)^2$ ma minimum lokalne w punktach $x_1=-1$ oraz $x_2=1$ oraz maksimum lokalne w punkcie $x_0=0$.

Wykres funkcji f przedstawia rysunek 185



Rys. 185 Wykres funkcji $f(x)=(x^2-1)^2$

Punkty, w których istnieją ekstrema lokalne funkcji różniczkowalnych, można znajdować za pomocą twierdzeń o pochodnych.

11.7. Twierdzenia o wartości średniej

Twierdzenie 11-9 [TWIERDZENIE FERMATA] *Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna i ma w punkcie x_0 ekstremum, to $f'(x_0) = 0$.*

Z powyższego twierdzenia, zwanego *twierdzeniem Fermata*[22], wynika, że w przypadku funkcji różniczkowalnej f miejsca zerowe jej pochodnej są „kandydatami" na ekstrema tej funkcji. Jeśli w jakimś punkcie pochodna funkcji f jest różna od zera, to w tym punkcie funkcja f nie posiada ekstremum.

■ Rozważmy funkcję $f(x) = x^3$ dla $x \in \mathbb{R}$. Jej pochodną jest funkcja $f'(x) = 3x^2$ i $f'(0) = 0$. W punkcie $x_0 = 0$ pochodna funkcji f jest równa 0, ale w tym punkcie funkcja f nie posiada ani maksimum ani minimum, bo dla $x < x_0 = 0$ wartości funkcji f są ujemne, a dla $x > 0 = x_0$ wartości funkcji f są dodatnie.

Z faktu, że $f'(x_0) = 0$ nie wynika więc, że w punkcie x_0 funkcja f ma ekstremum. Zerowanie się pochodnej funkcji w punkcie x_0 jest warunkiem koniecznym, ale nie wystarczającym na to, aby w punkcie x_0 istniało ekstremym funkcji.

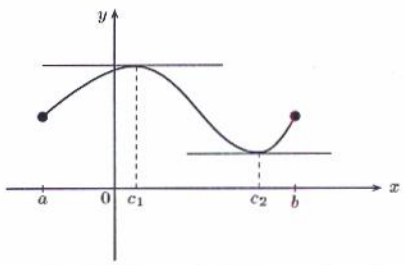
11.27. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 4x - 1$. Znajdź kandydatów na jej ekstrema. Jak rozstrzygnąłbyś, czy w tych punktach funkcja f posiada ekstrema?

□ Mamy tu $f'(x) = x^2 + 5x + 4$. Pierwiastkami równania $f'(x) = 0$, a tym samym kandydatami na ekstrema funkcji f są punkty $x_1 = -4$ oraz $x_2 = -1$.

Uwaga: Funkcja $f(x) = |x|$ nie jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 0$ a posiada w tym punkcie minimum. Funkcja może więc posiadać ekstremum w takim punkcie, w którym nie jest różniczkowalna.

Twierdzenie 11-10 [TWIERDZENIE ROLLE'A] *Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$ i różniczkowalna na przedziale (a, b) oraz $f(a) = f(b)$, to istnieje w przedziale (a, b) taki punkt c, że $f'(c) = 0$.*

To twierdzenie, zwane *twierdzeniem Rolle'a*[23], orzeka, że na wykresie funkcji ciągłej na przedziale domkniętym, mającej pochodną w każdym punkcie wewnątrz tego przedziału i przyjmującej równe wartości na jego krańcach, istnieje punkt, w którym styczna jest równoległa do osi odciętych (a więc pozioma, por. rysunek 186).



Rys. 186 Twierdzenie Rolle'a a wykres funkcji

11.28. Zweryfikuj, czy są spełnione założenia twierdzenia Rolle'a gdy:

[22] Pierre de Fermat (1601-1665), matematyk francuski.
[23] Michel Rolle (1652-1719), matematyk francuski.

a) $f(x) = (|x-1|)^2$ oraz $a = -1$ i $b = 1$,
b) $g(x) = x^3$ oraz $a = -1$ i $b = 4$,
c) $h(x) = x(x^2-1)$ oraz $a = -1$ i $b = 1$.

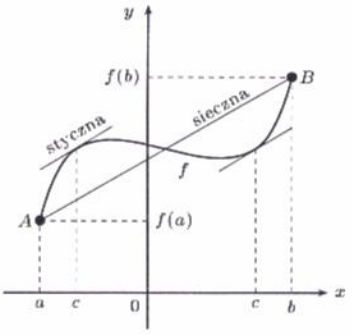
□ Zauważ, że

$$f(x) = (|x-1|)^2 = \begin{cases} (x+1)^2 \text{ dla } x < 0, \\ (x-1)^2 \text{ dla } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Funkcja f jest ciągła na przedziale $[-1,1]$, ale nie jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 0$, nie spełnia więc założeń twierdzenia Rolle'a. Naszkicuj wykres funkcji f.

Twierdzenie 11-11 [TWIERDZENIE LAGRANGE'A] *Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$ i różniczkowalna na przedziale (a,b), to istnieje w przedziale (a,b) taki punkt c, że* $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

To twierdzenie, zwane *twierdzeniem Lagrange'a*[24], orzeka, że na wykresie funkcji ciągłej na przedziale domkniętym, mającej pochodną w każdym punkcie wewnątrz tego przedziału, istnieje punkt, w którym styczna do wykresu jest równoległa do siecznej przechodzącej przez punkty $A = (a, f(a))$ i $B = (b, f(b))$ (por. rysunek 187).



Rys. 187 Twierdzenie Lagrange'a w interpretacji geometrycznej

11.29. Korzystając z twierdzenia Lagrange'a udowodnij, że jeśli pochodna funkcji f jest tożsamościowo równa zero na przedziale (a,b), to f jest funkcją stałą, a więc $f(x) = c$ dla każdego $x \in (a,b)$.

11.30. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{1}{x+1}$ i przedział $[0,3]$. Znajdź na wykresie funkcji f taki punkt, w którym styczna jest równoległa do siecznej przechodzącej przez punkty $A = (0,1)$ i $B = (3, \frac{1}{4})$. Istnienie tego punktu wynika z twierdzenia Lagrange'a.

11.31. Korzystając z twierdzenia Lagrange'a wykaż, że:
a) jeśli $f'(x) > 0$ dla każdego $x \in (a,b)$, to funkcja f jest rosnąca na przedziale (a,b),
b) jeśli $f'(x) < 0$ dla każdego $x \in (a,b)$, to funkcja f jest malejąca na przedziale (a,b),

11.32. Znajdź przedziały, w których są monotoniczne poniższe funkcje:
a) $f(x) = x \ln x$, b) $g(x) = \frac{x^3}{x-2}$, c) $h(x) = e^x \cos x$.

[24] Joseph Louis de Lagrange (1736-1813), matematyk i astronom francuski.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (0, +\infty)$. Funkcja f jest różniczkowalna i $f'(x) = \ln x + 1$ dla $x \in (0, +\infty)$. Nietrudno sprawdzić, że

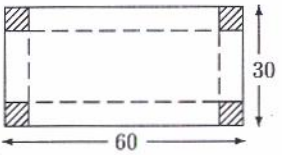
$$f'(x) > 0 \iff \ln x + 1 > 0 \iff \tfrac{1}{e} < x < +\infty.$$

Funkcja f jest zatem rosnąca na przedziale $(\frac{1}{e}, +\infty)$. Jest

$$f'(x) < 0 \iff \ln x + 1 < 0 \iff 0 < x < \tfrac{1}{e}.$$

Na przedziale $(0, \frac{1}{e})$ funkcja f jest zatem malejąca.

11.33. Z kartonu blachy o wymiarach $a = 30$cm i $b = 60$cm trzeba sporządzić pudełko. Powstanie ono przez wycięcie w rogach tego kartonu jednakowych kwadratów, zgięciu i zespawaniu dwu boków każdego z wycięć (zob. rysunek 188). Jaki powinien być bok kwadratów, aby pojemność powstałego pudełka była największa z możliwych?



Rys. 188 Wycięcia i linie zagięć kartonu blachy, z którego powstanie pudełko

□ Niech x oznacza szukaną długość boku kwadratu. Jest oczywiste, że $0 < x < 15$. Oznaczmy przez $V(x)$ pojemność pudełka, gdy jego wysokość jest równa x. Ze wzoru na objętość prostopadłościanu wynika, że $V(x) = (30 - 2x)(60 - 2x) \cdot x$. Objętość pudełka jest więc funkcją $V(x) = 4x^3 - 180x^2 + 1800x$. Poszukujemy takiego x w przedziale $(0, 15)$, w którym funkcja V ma maksimum. Kandydatami na ekstrema funkcji V są miejsca zerowe jej pochodnej. Mamy

$$V'(x) = 12x^2 - 360x + 1800.$$

Równanie $12x^2 - 360x + 1800 = 0$ jest równoważne z równaniem $x^2 - 30x + 150 = 0$. Wyróżnikiem trójmianu kwadratowego $x^2 - 30x + 150$ jest liczba dodatnia $\Delta = 300$, a zatem $\sqrt{\Delta} = 10\sqrt{3}$. Miejscami zerowymi tego trójmianu są zatem liczby:

$$x_1 = \tfrac{30-3\sqrt{3}}{2} \quad \text{oraz} \quad x_1 = \tfrac{30+3\sqrt{3}}{2}.$$

Jeśli funkcja V ma ekstremum, to tylko w punkcie $x_1 = \frac{30-3\sqrt{3}}{2}$, gdyż $x_2 > 15$, a więc x_2 nie należy do dziedziny funkcji V.

Sprawdź, że

$V'(x) > 0$ dla $x < x_1$, a więc na lewo od punktu x_1 funkcja V jest rosnąca,

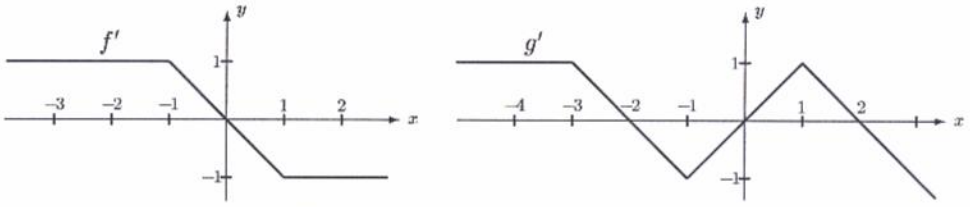
$V'(x) < 0$ dla $x > x_1$ i $x < 15$, a zatem na prawo od punktu x_1 funkcja V jest malejąca.

Przy przejściu przez punkt x_1 funkcja V z rosnącej staje się malejąca, a zatem w punkcie x_1 funkcja osiąga maksimum.

11.34. W trójkąt o podstawie a i wysokości h trzeba wpisać prostokąt o największym polu. Znajdź jego wymiary. Jakie jest to maksymalne pole?

11.35. Przedstaw liczbę 12 w postaci iloczynu takich dwu liczb rzeczywistych dodatnich a i b, że ich suma jest najmniejsza.

11.36. Na rysunku 189 mamy wykresy pochodnych dwóch funkcji liczbowo-liczbowych: f i g. Odczytaj z tych wykresów wszystkie informacje na temat monotoniczności i ekstremów zarówno funkcji f, jak i funkcji g.



Rys. 189 Wykresy pochodnych dwu funkcji f i g

□ Z faktu, że $f'(x) > 0$ dla $x \in (-\infty, 0)$, wynika, że na przedziale $(-\infty, 0)$ funkcja f jest rosnąca. Na przedziale $(0, +\infty)$ funkcja f jest malejąca, bo na tym przedziale jej pochodna jest ujemna. W punkcie $x_0 = 0$ funkcja f ma maksimum, bo przechodząc przez ten punkt jej pochodna zmienia znak, a więc funkcja f z rosnącej staje się malejąca.

Postawmy pytanie:

Czy na podstawie wykresu pochodnej funkcji f można określić przepis na $f(x)$?

Na przedziale $(-\infty, -1)$ jest $f'(x) = 1$, czyli $f(x) = x + c_1$ dla $x < -1$, gdzie c_1 jest dowolną ustaloną liczbą rzeczywistą.

Na przedziale $(-1, 1)$ jest $f'(x) = -x$, a więc $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + c_2$ dla $-1 < x < 1$, przy czym c_2 jest dowolną ustaloną liczbą rzeczywistą.

Na przedziale $(1, +\infty)$ jest $f'(x) = -1$, a zatem $f(x) = -x + c_3$ dla $x > 1$, gdzie c_3 jest dowolną stałą rzeczywistą.

A co z wartościami $f(-1)$ i $f(1)$? Czy funkcję f można określić jednoznacznie na podstawie wzoru na jej pochodną? Do tych pytań powrócimy w rozdziale 12.

11.8. Pochodne wyższych rzędów

Definicja 11-8 [DRUGA POCHODNA] Niech f będzie funkcją różniczkowalną, niech D_f będzie jej dziedziną. Funkcję f', która każdemu $x_0 \in D_f$ przyporządkowuje liczbę $f'(x_0)$ nazwaliśmy pochodną funkcji f. Jeżeli funkcja f' jest różniczkowalna, to na zbiorze D_f można określić nową funkcję, która każdemu $x_0 \in D_f$ przyporządkowuje pochodną funkcji f' w tym punkcie. Tę nową funkcję, jako pochodną pochodnej funkcji f, nazywamy *drugą pochodną funkcji* f, albo *pochodną drugiego rzędu* i oznaczamy przez f'', albo $f^{(2)}$.

[TRZECIA POCHODNA] Analogicznie definiujemy *trzecią pochodną* (*pochodną rzędu trzeciego*) *funkcji* f jako pochodną jej drugiej pochodnej i oznaczamy f''', albo $f^{(3)}$.

[n-TA POCHODNA] Ogólnie *n-tą pochodną funkcji* f nazywamy funkcję $f^{(n)}$, która jest pochodną $(n-1)$-szej pochodnej funkcji f.

Definicja 11-9 [FUNKCJA n-KROTNIE RÓŻNICZKOWALNA] Funkcję f, która posiada n-tą pochodną, nazywamy *n-krotnie różniczkowalną*.

■ Funkcja $f(x) = x^4$ jest różniczkowalna i $f'(x) = 4x^3$. Pochodna funkcji f, a więc funkcja f' jest także różniczkowalna. Jest $f''(x) = 12x^2$. Funkcja f''' określona wzorem $f'''(x) = 24x$ jest pochodną drugiej pochodnej funkcji f, a więc jest to trzecia pochodna funkcji f, czyli pochodna rzędu trzeciego funkcji f. Jest $f^{(4)}(x) = 24$ oraz $f^{(n)}(x) = 0$ dla $n > 4$.

11.37. Dana jest funkcja $f(x) = 7x^5 + \pi x^4 + \sqrt{2}x^3 - 13x^2 + x - 17$. Oblicz f' oraz f''. Znajdź także $f^{(n)}$ dla $n > 2$.

11.38. Zbadaj istnienie drugiej pochodnej funkcji f, gdzie

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cdot \sin\frac{1}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0. \end{cases}$$

Twierdzenie 11-12 *Jeżeli funkcja f ma w otoczeniu punktu x_0 pierwszą i drugą pochodną ciągłą oraz $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) \neq 0$, to:*
— *jeżeli $f''(x_0) < 0$, to w punkcie x_0 funkcja f ma maksimum lokalne,*
— *jeżeli $f''(x_0) > 0$, to w punkcie x_0 funkcja f ma minimum lokalne.*

11.39. Funkcja $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 10$ ma pierwszą i drugą pochodną ciągłą. Za pomocą tych pochodnych znajdź ekstrema lokalne funkcji $f(x)$.

□ Jest $f'(x) = 15x^4 - 15x^2$. Miejscami zerowymi pochodnej funkcji f są pierwiastki równania $15x^4 - 15x^2 = 0$, czyli pierwiastki równania $15x^2(x-1)(x+1) = 0$. Mamy zatem trzech kandydatów na ekstrema funkcji f. Są to punkty: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ i $x_3 = 1$. O tym, czy w tych punktach x_1, x_2, x_3 istnieje ekstremum funkcji f i jakie (maksimum czy minimum) rozstrzygniemy badając znak drugiej pochodnej funkcji f we wspomnianych punktach. Mamy tu

$$f''(x) = 60x^3 - 30x \quad \text{a zatem} \quad f''(0) = 0, f''(-1) = -30 < 0, f''(1) = 30 > 0.$$

Z tych faktów wynika, że w punkcie $x_2 = -1$ funkcja f ma ekstremum i to maksimum, w punkcie $x_3 = 1$ funkcja f ma minimum.

Czy można twierdzić, że w punkcie $x_1 = 0$ funkcja f nie posiada ekstremum?

11.40. Przedstaw liczbę 20 jako sumę takich liczb x i y, aby ich iloczyn był maksymalny. Do ogrodzenia działki rolnik dysponuje siatką o długości 20m. Jak dobrać wymiary działki prostokątnej, aby można było ją ogrodzić wspomnianą siatką i zarazem jej pole było największe z możliwych działek o obwodzie 20m? Co łączy te dwa problemy?

□ Jeśli szukane składniki oznaczyć przez x i y, to $y = 20 - x$. Iloczyn tych składników jest więc postaci $x(20-x)$. Pytamy, dla jakiego x iloczyn $x(20-x)$ jest maksymalny. Ten iloczyn jest funkcją $f(x) = x(20-x)$. Zauważ, że $f'(x) = 20 - 2x$, czyli $f'(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 10$. Z kolei $f''(x) = -2$, a więc $f''(10) = -2 < 0$, czyli w punkcie $x_0 = 10$ funkcja f posiada maksimum.

11.41. Z prostokątnego kawałka blachy o wymiarach 50cm na 80cm robi się pudełka (bez przykrywki). W narożach prostokąta wycina się kwadraty, zagina i spawa (lutuje) na krawędziach. Jaki powinien być bok odcinanego kwadratu, aby objętość powstałego pudełka była maksymalna?

□ Niech x oznacza bok odcinanego kwadratu. Wymiary pudełka są następujące: x – wysokość, $(50 - 2x)$ – szerokość oraz $(80 - 2x)$ – długość. Objętość pudełka jest

iloczynem $(50-x)(80-2x)x$. Ta objętość jest funkcją zmiennej x, określoną wzorem $f(x) = (50-x)(80-2x)x$. Jest $f(x) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x$ oraz $f'(x) = 12x^2 - 520x + 4000$. Miejscami zerowymi pochodnej są liczby $x_1 = 10$ oraz $x_2 = \frac{200}{6}$. Liczba x_2 jako bok odcinanego kwadratu nie spełnia warunków zadania (suma $\frac{200}{3} + \frac{200}{3} > 50$). Jedynym kandydatem na ekstremum funkcji f, spełniającym warunki zadania, jest $x_1 = 10$. Mamy tu $f''(x) = 24x - 520$, a zatem $f''(10) = 240 - 520 < 0$. W punkcie $x_1 = 10$ funkcja f ma maksimum. Objętość pudełka będzie maksymalna, gdy bok odcinanych kwadratów będzie równy 10cm.

11.42. Puszka konserwowa ma mieć kształt walca i pojemność 1dcm^3. Jaki powinien być promień tego walca, aby powierzchnia blachy zużytej na wyprodukowanie takiej puszki była minimalna?

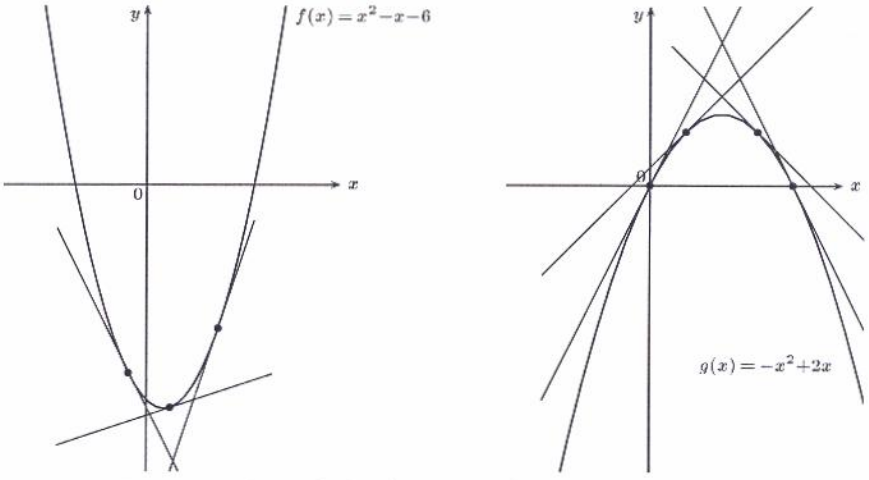
11.43. Liczbę 8 rozłożyć na takie dwa składniki, aby suma ich sześcianów była najmniejsza.

11.44. W kulę o promieniu r trzeba wpisać walec. Jaki powinien być promień x podstawy tego walca, aby pole jego powierzchni bocznej było maksymalne?

11.45. Wyznacz taki dodatni ułamek właściwy, aby różnica tego ułamka i jego kwadratu miała maksymalną wartość.

11.9. Funkcja wklęsła. Funkcja wypukła

Analizujmy wykres funkcji różniczkowalnej f pod kątem jego położenia względem stycznych do niego w punktach bliskich punktowi $(x_0, f(x_0))$. Na rysunku 190 mamy wykresy dwu funkcji $f(x) = x^2 - x - 6$ oraz $g(x) = -x^2 + 2x$.



Rys. 190 Wykresy funkcji$f$ i g oraz położenie kilku stycznych

W jakimkolwiek punkcie poprowadzimy styczną do wykresu funkcji f, to leży ona pod tym wykresem, czyli wykres leży nad nią. Mówimy, że wykres funkcji f jest *krzywą wypukłą*.

W przypadku funkcji g jest inaczej. W jakimkolwiek punkcie wykresu poprowadzimy styczną, to leży ona nad tym wykresem, czyli wykres leży pod nią. Mówimy, że wykres funkcji g jest *krzywą wklęsła*.

Powyższe geometryczne własności wykresu funkcji odnosimy do samej funkcji, nazywając funkcję wypukłą albo wklęsłą.

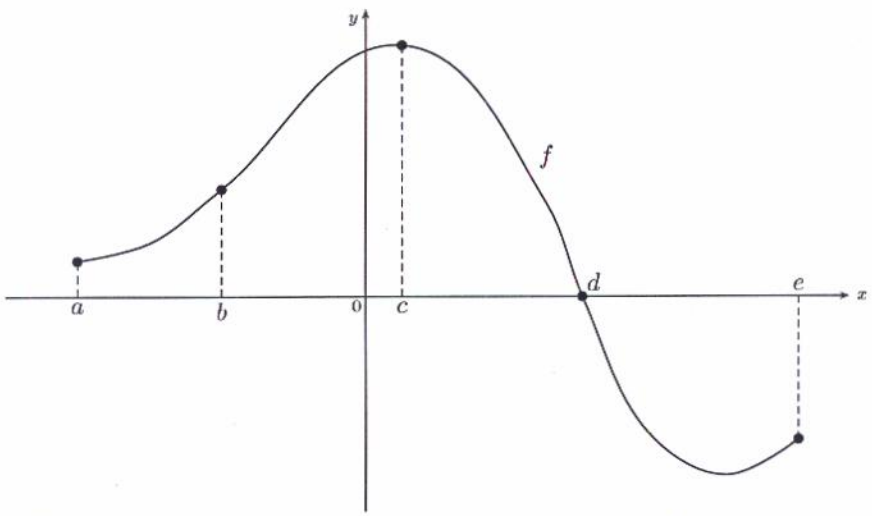
Zakładamy dalej, że f jest funkcją różniczkowalną na przedziale i że druga pochodna funkcji f jest ciągła.

Definicja 11-10 [FUNKCJA WYPUKŁA] Mówimy, że wykres funkcji f jest na przedziale (a, b) *krzywą wypukłą*, jeśli dla każdego $x_0 \in (a, b)$ ten wykres leży nad styczną do tego wykresu w punkcie $(x_0, f(x_0))$.
O samej funkcji f mówimy wtedy, że jest *funkcją wypukłą na przedziale* (a, b).



Rys. 191 Krzywa wypukła i krzywa wklęsła

Definicja 11-11 [FUNKCJA WKLĘSŁA] Mówimy, że wykres funkcji f jest na przedziale (c, d) *krzywą wklęsłą*, jeśli dla każdego $x_0 \in (c, d)$ wykres funkcji f leży pod styczną do wykresu w punkcie $(x_0, f(x_0))$.
O samej funkcji f mówimy wtedy, że jest *funkcją wklęsłą na przedziale* (c, d).



Rys. 192 Wykres funkcji f: na przedziale (a, b) jako krzywa wypukła i na przedziale (c, d) jako krzywa wklęsła

Twierdzenie 11-13 [WARUNEK WYSTARCZAJĄCY DO WYPUKŁOŚCI LUB WKLĘSŁOŚCI FUNKCJI] *Załóżmy, że funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna (tzn. posiada drugą pochodną).*

1) *Jeżeli* $f''(x) > 0$ *dla każdego* $x \in (a,b)$, *to wykres funkcji* f *jest krzywą wypukłą na przedziale* (a,b), *czyli* f *jest funkcją wypukłą na tym przedziale,*
2) *Jeżeli* $f''(x) < 0$ *dla każdego* $x \in (a,b)$, *to wykres funkcji* f *jest krzywą wklęsłą na przedziale* (a,b), *czyli* f *jest funkcją wklęsłą na tym przedziale.*

Uwaga: Wykres funkcji $f(x) = x^4$ jest krzywą wypukłą na przedziale $(-2,2)$, czyli f jest funkcją wypukłą na tym przedziale i równocześnie $f''(0) = 0$.

■ Znajdźmy przedziały wypukłości i wklęsłości funkcji $f(x) = x^4 - 24x^3 + 6x + 5$. Ma ona pierwszą i drugą pochodną na przedziale $(-\infty, +\infty)$ i $f'(x) = 4x^3 - 48x + 6$ oraz $f''(x) = 12x^2 - 48 = 12(x^2 - 4)$. Obie te pochodne są funkcjami ciągłymi na przedziale $(-\infty, +\infty)$ i

$$f''(x) < 0 \text{ dla } x \in (-2,2) \quad \text{oraz} \quad f''(x) > 0 \text{ dla } x \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty),$$

a więc funkcja f jest wklęsła na przedziale $(-2,2)$ a wypukła na przedziale $(-\infty,-2)$ oraz na przedziale $(2,+\infty)$.

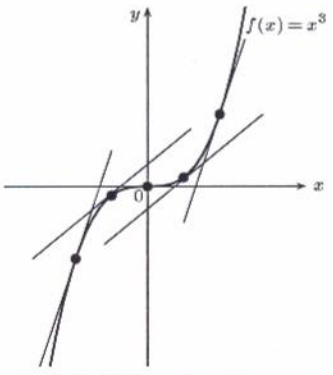
11.46. Niech $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ oraz $g(x) = \ln x$. Wykaż, że są to funkcje wklęsłe na przedziale $(0,+\infty)$.

11.47. Wyznacz przedziały wklęsłości i wypukłości (wykresu) funkcji f, jeśli:
a) $f(x) = x^3 + 12x^2 + 36x - 50$, b) $f(x) = x^3 + x + 1$, c) $f(x) = -x^3 + x^2$.

11.48. Dane są funkcje: $f(x) = x^4$, $g(x) = e^{-x}$ i $h(x) = |x^5|$. Dla każdej z tych funkcji określ przedziały, w których jest ona wklęsła oraz przedziały, w których jest wypukła.

11.10. Punkty przegięcia wykresu funkcji

Prześledźmy wykres funkcji $f(x) = x^3$ w otoczeniu liczby 0 (zob. rysunek 193).



Rys. 193 Wykres funkcji $f(x) = x^3$ a styczne w kilku jego punktach

Jeżeli $x_0 < 0$, to wykres funkcji f leży pod styczną w punkcie $(x_0, f(x_0))$.
Jeżeli $x_0 > 0$, to wykres funkcji f leży nad styczną w punkcie $(x_0, f(x_0))$.

Na prawo od zera (dla $x > 0$) wykres funkcji f leży nad styczną. Na lewo od zera (dla $x < 0$) wykres funkcji f leży pod styczną. Punkt $(0,0)$ jest *punktem przegięcia* wykresu funkcji f.

W dalszym ciągu zakładamy, że funkcja f posiada drugą pochodną i ta pochodna jest ciągła na przedziale (a, b).

Definicja 11-12 [PUNKT PRZEGIĘCIA] Niech $x_0 \in (a, b)$. Punkt o współrzędnych $(x_0, f(x_0))$ nazywamy *punktem przegięcia wykresu funkcji* f jeśli:
— na przedziale (a, x_0) wykres funkcji f jest krzywą wklęsłą a na przedziale (x_0, b) jest krzywą wypukłą, bądź jeśli
— na przedziale (a, x_0) wykres funkcji f jest krzywą wypukłą a na przedziale (x_0, b) jest krzywą wklęsłą.
Jeżeli punkt o współrzędnych $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia wykresu funkcji f, to mówimy, że w punkcie x_0 funkcja f ma *punkt przegięcia*.

■ Niech $f(x) = x^3$. Wykres tej funkcji przedstawiono na rysunku 193. Na przedziale $(-\infty, 0)$ wykres funkcji f leży pod styczną, a więc jest krzywą wklęsłą. Na przedziale $(0, +\infty)$ wykres funkcji f leży nad styczną, a więc jest krzywą wypukłą. Punkt $(0, 0)$ jest punktem przegięcia wykresu funkcji f.

Mamy tu $f'(x) = 3x^2$ i $f''(x) = 6x$. Dla $x < 0$ jest $f''(x) < 0$

Twierdzenie 11-14 [WARUNEK KONIECZNY ISTNIENIA PUNKTU PRZEGIĘCIA] *Jeżeli x_0 jest punktem przegięcia wykresu funkcji f, to $f''(x_0) = 0$.*

Twierdzenie 11-14 orzeka, że zerowanie się drugiej pochodnej funkcji f w punkcie x_0 jest warunkiem koniecznym do istnienia w punkcie $(x_0, f(x_0))$ punktu przegięcia wykresu funkcji f.

Twierdzenie 11-15 [WARUNEK WYSTARCZAJĄCY ISTNIENIA PUNKTU PRZEGIĘCIA] *Załóżmy, że funkcja f posiada drugą pochodną ciągłą w pewnym otoczeniu liczby x_0 a więc na przedziale $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$. Jeżeli:*
— *$f''(x) < 0$ dla każdego $x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$ i $f''(x_0) = 0$ i $f''(x) > 0$ dla każdego $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$, albo*
— *$f''(x) > 0$ dla każdego $x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$ i $f''(x_0) = 0$ i $f''(x) < 0$ dla każdego $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$,*
to punkt $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia wykresu funkcji f.

■ Znajdziemy punkty przegięcia wykresu funkcji $f(x) = (x^2 + 1)e^x$. Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbb{R}$. Nietrudno sprawdzić, że $f''(x) = (x^2 + 4x + 3)e^x$. Kandydatami na punkty przegięcia funkcji f są miejsca zerowe jej drugiej pochodnej. Zauważ, że $e^x > 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, a zatem:

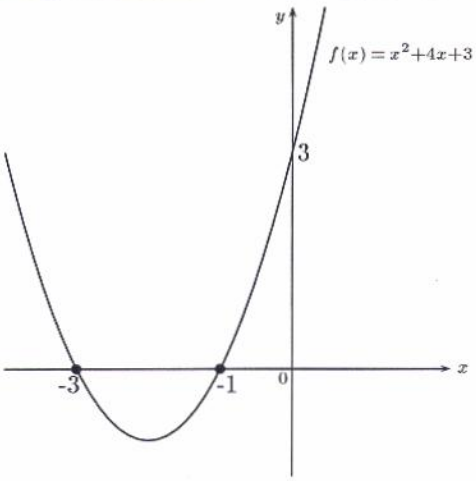
$f''(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x^2 + 4x + 3 = 0$,

$f''(x) > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x^2 + 4x + 3 > 0$,

$f''(x) < 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x^2 + 4x + 3 < 0$.

Poszukiwanie punktu przegięcia (a zarazem rozstrzyganie, gdzie funkcja f jest wklęsła a gdzie wypukła) sprowadza się do znajdowania miejsc zerowych (i badania znaku) funkcji kwadratowej $g(x) = x^2 + 4x + 3$. Mamy tu: $\Delta = 16 - 4 \cdot 3 = 4$, a zatem funkcja g ma dwa miejsca zerowe: $x_1 = -3$ i $x_2 = -1$. Są to zarazem miejsca zerowe funkcji f'', a więc jeśli funkcja f ma punkty przegięcia, to mogą nimi być jedynie punkty $x_1 = -3$ i $x_2 = -1$.

Wykresem funkcji g jest parabola, której ramiona są skierowane ku górze i która przecina oś odciętych w punktach: $x_1 = -3$ i $x_2 = -1$ (por. rys. 194).



Rys. 194 Wykres funkcji $g(x) = x^2 + 4x + 3$

Z wykresu funkcji g wynika zatem, że:

$f''(x) > 0$ dla $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$,

$f''(x) < 0$ dla $x \in (-3, -1)$,

a zatem

— funkcja f jest wypukła na przedziale $(-\infty, -3)$ oraz na przedziale $(-1, +\infty)$,

— na przedziale $(-3, -1)$ funkcja f jest wklęsła.

W punkcie $x_1 = -3$ funkcja f ma punkt przegięcia, bo na lewo od tego punktu funkcja jest wypukła a na prawo wklęsła. Funkcja f ma także drugi punkt przegięcia. Jest nim $x_2 = -1$, bo na lewo od tego punktu funkcja f jest wklęsła, na prawo zaś – wypukła.

Wykres funkcji $f(x) = (x^2+1)e^x$ jest więc krzywą wypukłą na przedziale $(-\infty, -3)$ i na przedziale $(-1, +\infty)$, jest natomiast krzywą wklęsłą na przedziale $(-3, -1)$. Punkty o współrzędnych $(-3, 10e^{-3})$ i $(-1, 2e^{-1})$ są punktami przegięcia wykresu funkcji f.

11.49. Znajdź punkty przegięcia wykresów następujących funkcji:

$$f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2, \quad g(x) = x^2 \ln x, \quad h(x) = 4x^2 + \tfrac{1}{x}.$$

Dla każdej z tych funkcji wyznacz przedziały, w których jest ona wypukła i w których jest ona wklęsła.

11.11. Badanie przebiegu zmienności funkcji

Niech f będzie funkcją liczowo-liczbową. Badanie je przebiegu organizuje się według następującego planu:

1. Określenie dziedziny D_f funkcji.
2. Rozstrzyganie czy funkcja f jest
   a) parzysta albo nieparzysta,
   b) okresowa.
3. Znajdowanie miejsc zerowych funkcji f, tj. pierwiastków równania $f(x) = 0$.

4. Badanie ciągłości funkcji f, rozstrzyganie, w których punktach funkcja f jest nieciągła i jaki jest to rodzaj nieciągłości, określanie przedziałów, w których funkcja f jest ciągła.

5. Obliczanie granic jednostronnych na krańcach przedziałów określoności funkcji f.

6. Znajdowanie asymptot pionowych i ukośnych (napisanie równania każdej z tych prostych).

7. Obliczanie pochodnej funkcji f oraz:

a) wyznaczenie „kandydatów" na ekstrema funkcji f, tj. pierwiastków równania $f'(x) = 0$;

b) ustalenie przedziałów, w których funkcja f jest monotoniczna, a więc szukanie rozwiązania nierówności $f'(x) < 0$ oraz $f'(x) > 0$;

c) Rozstrzyganie, czy w punktach, które są miejscami zerowymi pochodnej, ta pochodna zmienia znak (z ujemnej staje się dodatnia lub na odwrót), a więc znajdowanie ekstremów funkcji f.

8. Obliczanie drugiej pochodnej funkcji f oraz:

a) znajdowanie miejsc zerowych drugiej pochodnej jako „kandydatów" na punkty przegięcia,

b) znajdowanie przedziałów wklęsłości i wypukłości, a więc rozwiązywanie nierówności $f''(x) > 0$ oraz $f''(x) < 0$.

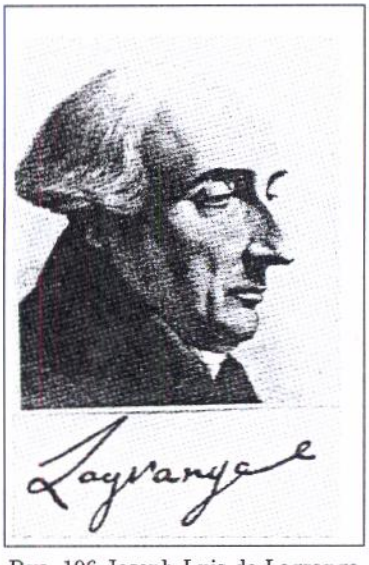
9. Porządkowanie zebranych informacji o funkcji w tabeli.

10. Naszkicowanie wykresu funkcji w oparciu o zebrane w tabeli informacje o własnościach analitycznych tej funkcji.

11.50. Zbadaj przebieg zmienności a następnie naszkicuj wykresy następujących funkcji: a) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, b) $g(x) = -x^3 + 4x - 3$, c) $h(x) = xe^{-2x}$.



Rys. 195 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)



Rys. 196 Joseph Luis de Lagrange (1736-1813)

12. Rachunek całkowy

12.1. Całka nieoznaczona i jej własności

W rachunku różniczkowym poszukujemy dla danej funkcji f jej pochodną. Teraz zajmiemy się niejako zagadnieniem odwrotnym: będziemy poszukiwać funkcji, której pochodna jest znaną funkcję f. To zagadnienie pojawiło się w zadaniu 11.36 na s. 233. Na rysunku 189 mamy wykresy pochodnych dwóch funkcji, problem zaś dotyczył określenia tych funkcji. Pojawiło się tu również pytanie, czy istnieje tylko jedna taka funkcja, czy też jest ich wiele.

Symbolem I oznaczamy dalej dowolny przedział liczbowy.

Definicja 12-1 [FUNKCJA PIERWOTNA] Funkcję F nazywamy *funkcją pierwotną funkcji* f na przedziale I, jeśli $F'(x) = f(x)$ dla każdego $x \in I$.

■ Niech $f(x) = 2x$ dla $x \in I = (-\infty, +\infty)$. Funkcją pierwotną funkcji f jest funkcja $F(x) = x^2$, bo $F'(x) = (x^2)' = 2x$ dla każdego $x \in (-\infty, +\infty)$. Ale każda funkcja F_c określona wzorem $F_c(x) = x^2 + c$, gdzie c jest dowolną ustaloną liczbą rzeczywistą, jest także funkcją pierwotną funkcji $f(x) = 2x$, bo $F_c'(x) = (x^2 + c)' = 2x$.

■ Niech $f(x) = \cos x$ dla $x \in I = (-\infty, +\infty)$. Funkcją pierwotną tej funkcji f jest funkcja $F(x) = \sin x$, bo dla $x \in I$ jest $F'(x) = (\sin x)' = \cos x$ (por. zadanie 11.2 na s. 221). Niech $F_c(x) = \sin x + c$, gdzie c jest dowolną ustaloną liczbą rzeczywistą. Z faktu, że $F_c'(x) = (\sin x + c)' = (\sin x)' = \cos x$ dla każdego $x \in (-\infty, +\infty)$, wynika, że funkcja F_c jest także funkcją pierwotną funkcji $f(x) = \cos x$.

12.1. Rozważmy funkcje: $f(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ oraz $F(x) = \sqrt{1-x^2}$, $G(x) = \sqrt{1-x^2} + \pi$ i $H(x) = \sqrt{1-x^2} - 13$, określone na przedziale $I = (-1, +1)$. Sprawdź, że każda z funkcji F, G i H jest funkcję pierwotną funkcji f na przedziale I.

□ Z twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej (zob. twierdzenie 11-6 na s. 227) oraz ze wzoru: $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ dla $x > 0$ (zob. tabela na s. 225) wynika, że

$$F'(x) = (\sqrt{1-x^2})' = (-2x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = f(x) \text{ dla } x \in (-1, +1).$$

Ostatni przykład sugeruje, że prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 12-1 *Jeżeli F jest funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I, to:*
1) *funkcja $F_c(x) = F(x) + c$, gdzie c jest dowolną ustaloną liczbą rzeczywistą, także jest funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I oraz*
2) *każda funkcja pierwotna funkcji f na przedziale I jest funkcją G postaci*

$$G(x) = F(x) + c.$$

Definicja 12-2 [CAŁKA NIEOZNACZONA] Niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I. Zbiór $\{F_c : [F_c(x) = F(x) + c] \wedge (c \in \mathbb{R})\}$, tj. zbiór wszystkich funkcji pierwotnych funkcji f na przedziale I, nazywamy *całką nieoznaczoną funkcji f na przedziale I* i oznaczamy $\int f(x)dx$. Funkcja, która ma funkcję pierwotną, nazywa się *funkcją całkowalną*. Wyznaczanie funkcji pierwotnej funkcji f (a więc równocześnie jej całki nieoznaczonej) nazywamy *całkowaniem funkcji f*.

■ Z powyższych rozważań wynika, że:

$$\int 2x dx = x^2 + c, \qquad \int \cos x dx = \sin x + c, \qquad \int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sqrt{1-x^2} + c.$$

Twierdzenie 12-2 *Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale I, to posiada funkcję pierwotną na tym przedziale, a więc jest całkowalna.*

Twierdzenie 12-2 orzeka, że ciągłość funkcji jest warunkiem wystarczającym do tego, aby była ona całkowalna. Ciągłość funkcji nie jest warunkiem koniecznym do całkowalności, bo istnieją funkcje nieciągłe, które są całkowalne.

Z twierdzeń o pochodnej wynika poniższe twierdzenie o całce nieoznaczonej.

Twierdzenie 12-3 *Jeżeli funkcja f jest całkowalna na przedziale I, to*

$$[\int f(x)dx]' = f(x) \quad oraz \quad \int f'(x)dx = f(x) + c,$$

gdzie c jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Ze wzorów na pochodne pewnych funkcji, a więc ze wzorów rachunku różniczkowego, wynikają następujące wzory na całki niektórych funkcji, a więc wzory rachunku całkowego:

1. $\int 1dx = x + c, \quad x \in \mathbb{R},$
2. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$ dla $n = 0, 1, 2, 3, \ldots, \quad x \in \mathbb{R},$
3. $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c,$ jeśli $\alpha \neq -1, \quad x \in \mathbb{R}$ i $x \neq 0,$
4. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c, \quad x \in \mathbb{R}$ i $x \neq 0,$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad 0 < a \neq 1$ oraz $x \in \mathbb{R},$
6. $\int e^x dx = e^x + c, \quad x \in \mathbb{R},$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + c, \quad x \in \mathbb{R},$
8. $\int \cos x dx = \sin x + c, \quad x \in \mathbb{R},$
9. $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + c, \quad x \in (-k\pi, k \cdot \pi + \pi),$ gdzie $k \in \mathbb{Z},$
10. $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + c, \quad x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi),$ gdzie $k \in \mathbb{Z}.$

Oprócz tych wzorów, do obliczania całek z funkcji liczbowo-liczbowych będziemy korzystać z poniższych twierdzeń rachunku całkowego.

Twierdzenie 12-4 *Jeżeli funkcje f i g są określone na tym samym przedziale i każda jest całkowalna, c zaś jest dowolną liczbą rzeczywistą, to:*

1) *całkowalna jest także funkcja $f + g$ i* $\int[f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$

2) *całkowalna jest także funkcja $c \cdot f$ oraz* $\int c \cdot f(x)dx = c\int f(x)dx.$

Z twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej wynika, że jeśli funkcja f jest różniczkowalna i $f(x) > 0$ dla każdego $x \in I$, to

$$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ dla } x \in I.$$

Z definicji całki nieoznaczonej i z powyższego faktu wynika zatem kolejne twierdzenie.

Twierdzenie 12-5 *Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna na przedziale I i $f(x) > 0$ dla każdego $x \in I$, to*

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln f(x) + c.$$

■ Z twierdzenia 12-5 wynika, że
$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \int \frac{2x}{2(1+x^2)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c.$

12.2. Korzystając z twierdzeń 12-4 i 12-5 oraz powyższych wzorów na całki niektórych funkcji oblicz: a) $\int(9x^2-10x+13)dx$, b) $\int(x^2-2e^x)dx$, c) $\int \frac{x+2}{x+3}dx$, d) $\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{x}}dx$.

□ Mamy tu: $\int(9x^2-10x+13)dx = \int 9x^2dx + \int(-10)xdx + \int 13dx =$
$9\int x^2dx - 10\int xdx + 13\int dx = (9\cdot\frac{1}{3}x^3+c_1) - 10(\frac{1}{2}x^2+c_2) + 13(x+c_3) =$
$3x^3-5x^2+13x+c$, gdzie $c = 9c_1 - 10c_c + 13c_3$.
Jest tu c dowolną stałą, bo dowolnymi stałymi są c_1, c_2 i c_3.

12.3. Oblicz następujące całki:
a) $\int \frac{x^4-1}{x+1}dx$, b) $\int \frac{1}{x^5}dx$, c) $\int \frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx$, d) $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx$.

12.2. Całkowanie przez części

Twierdzenie 12-6 *Jeżeli funkcje f i g są określone na tym samym przedziale I, obie są różniczkowalne i ich pochodne są funkcjami ciągłymi, to na przedziale I*

$$\int f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)dx.$$

■ Obliczymy całkę z funkcji $h(x) = x\cdot\cos x$. Zauważmy, że jeśli rozważyć dwie funkcje $f(x) = x$ oraz $g(x) = \sin x$, to zachodzi równość $h(x) = f(x)\cdot g'(x)$. Jest wówczas $f'(x) = 1$, a zatem z twierdzenia 12-6 wynika, że

$$\int h(x)dx = \int f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)dx =$$
$$x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + c.$$

12.4. Stosując twierdzenie 12-6 oblicz całki:
a) $\int xe^{-x}dx$, b) $\int e^x\cos x dx$, c) $\int x\cdot\ln x dx$, d) $\int x^3e^x dx$, e) $\int x^2\ln x dx$.

□ Dla całki z zadania b mamy:

$$\int e^x\cos x dx = e^x\sin x - \int e^x\sin x dx = e^x\sin x - (-e^x\cos x + \int e^x\cos x dx) =$$
$$e^x\sin x + e^x\cos x - \int e^x\cos x dx.$$

Mamy zatem równanie

$$\int e^x\cos x dx = e^x\sin x + e^x\cos x - \int e^x\cos x dx.$$

Niech $\int e^x\cos x dx = z$. Ostatnie równanie przyjmuje zatem postać

$$z = e^x\sin x + e^x\cos x - z,$$

z którego wynika, że

$$2z = e^x\sin x + e^x\cos x, \text{ czyli } z = \frac{1}{2}(e^x\sin x + e^x\cos x) = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x).$$

Jest więc ostatecznie

$$\int e^x\cos x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x).$$

12.3. Całkowanie przez podstawianie

Twierdzenie 12-7 [TW. O CAŁKOWANIU PRZEZ PODSTAWIENIE] *Jeżeli:*
1) $t = h(x)$ *jest funkcją różniczkowalną na przedziale* (a, b) *i odwzorowuje go na przedział* (α, β),
2) *funkcja* $g(t)$ *ma na przedziale* (α, β) *funkcję pierwotną* $G(t)$,
3) *dla każdego* $x \in (a, b)$ *jest* $f(x) = g[h(x)]h'(x)$,
to całka nieoznaczona funkcji $f(x)$ *na przedziale* (a, b) *wyraża się wzorem*

$$\int f(x)dx = G[h(x)] + c.$$

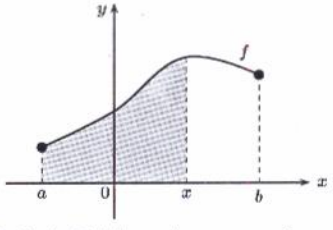
■ Obliczymy całkę funkcji $f(x) = (2x-1)^{20}$. Niech $2x-1 = t$. Różniczkując stronami ostatnią równość dostajemy $2xdx = dt$, czyli $dx = \frac{1}{2}dt$ a zatem

$$\int (2x-1)^{20}dx = \int t^{20}\tfrac{1}{2}dt = \tfrac{1}{2}\int t^{20}dt = \tfrac{1}{2}[\tfrac{t^{21}}{21}] + c = \tfrac{t^{21}}{42} + c = \tfrac{(2x-1)^{21}}{42} + c.$$

12.5. Stosując twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie, oblicz całki:
a) $\int \cos(2x+3)dx$, b) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+2\cos x}}dx$, c) $\int \frac{x}{x^2+1}dx$.

12.4. Całka oznaczona

Załóżmy, że f jest funkcją o wartościach nieujemnych i ciągłą na przedziale domkniętym $[a, b]$. Niech $x \in [a, b]$. Przez $F(x)$ oznaczmy pole figury ograniczonej od góry wykresem funkcji f, od dołu osią odciętych, od lewej prostą prostopadłą do osi odciętych w punkcie a oraz od prawej – prostą prostopadłą do osi odciętych w punkcie x. Tę figurę, zwaną *trapezem krzywoliniowym*, przedstawiono na rysunku 197.



Rys. 197 Funkcja F jako pole trapezu krzywoliniowego

Twierdzenie 12-8 [TWIERDZENIE NEWTONA-LEIBNIZA] *Funkcja* F *jest funkcją pierwotną funkcji* f *na przedziale* $[a, b]$, *tzn.*

$$F'(x) = f(x) \text{ dla każdego } x \in [a, b].$$

Z twierdzenia 12-8 wynika, że dla każdej funkcji nieujemnej i ciągłej na przedziale $[a, b]$ istnieje funkcja pierwotna.

Pole trapezu krzywoliniowego tj. figury ograniczonej:
— od góry wykresem funkcji f nieujemnej i ciągłej na przedziale $[a, b]$,
— od dołu osią odciętych,
— od lewej prostą prostopadłą do tej osi w punkcie a oraz
— od prawej prostą prostopadłą do osi odciętych w punkcie b,
jest równe różnicy $G(b) - G(a)$, gdzie G jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f.

Definicja 12-3 [CAŁKA OZNACZONA] Niech f będzie funkcją ciągłą na przedziale $[a, b]$, F zaś jej funkcją pierwotną. *Całką oznaczoną funkcji f na przedziale* $[a, b]$ nazywamy różnicę $F(b) - F(a)$ i oznaczamy $\int_a^c f(x)dx$. Liczby a i b nazywamy odpowiednio: *górną* i *dolną granicą całkowania*. Funkcję f nazywamy *funkcją podcałkową*. Różnicę $[F(b) - F(a)]$ oznaczamy symbolem $[F(x)]_a^b$.

Jest więc $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, gdzie F jest funkcją pierwotną funkcji f na przedziale $[a, b]$.

Jeśli f jest funkcją ciągłą na przedziale $[a, b]$ i $f(x) \leqslant 0$ dla $x \in [a, b]$, to

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b [-f(x)]dx.$$

Aby obliczyć całkę oznaczoną funkcji f na przedziale $[a, b]$ należy obliczyć całkę nieoznaczoną funkcji f na tym przedziale.

■ Funkcja $f(x) = x$ jest ciągła na przedziale $[0, 1]$. Jej funkcją pierwotną jest funkcja $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ a zatem

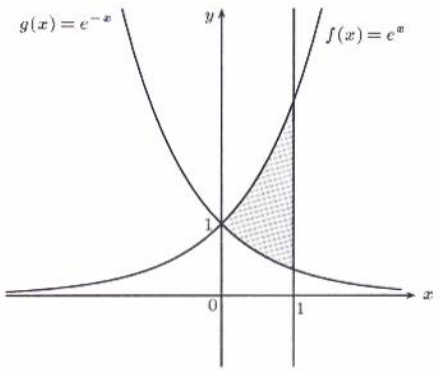
$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_0^1 = [\frac{1}{2}x^2]_0^1 = \frac{1}{2}(1)^2 - \frac{1}{2}(0^2) = \frac{1}{2}.$$

■ Jeśli $a > 0$ i $b > 0$ oraz $a < b$, to $\int_a^b \frac{1}{x}dx = [\ln x]_a^b = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}$.

12.6. Wykaż, że $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$.

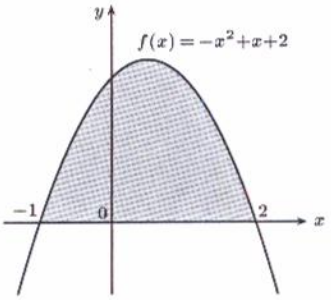
12.7. Oblicz pole obszaru ograniczonego wykresami dwu funkcji: $f(x) = e^x$ i $g(x) = e^{-x}$ oraz prostą prostopadłą do osi odciętch w punkcie $x_0 = 1$.

W zadaniu chodzi o pole zaciemnionego obszaru na rysunku 198.



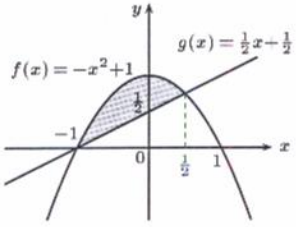
Rys. 198 Obszar ograniczony wykresami funkcji $f(x) = e^x$ i funkcji $g(x) = e^{-x}$

12.8. Oblicz pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji $f(x) = -x^2 + x + 2$ a osią odciętych (zob. rysunek 199).



Rys. 199 Obszar ograniczony wykresem funkcji $f(x) = -x^2 + x + 2$ i osią odciętych

12.9. Dane są dwie funkcje: $f(x) = -x^2 + 1$ oraz $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, gdzie $x \in \mathbb{R}$. Oblicz pole obszaru ograniczonego od góry wykresem funkcji f od dołu zaś wykresem funkcji g.



Rys. 200 Obszar ograniczony od góry wykresem funkcji $f(x) = -x^2 + 1$ od dołu zaś wykresem funkcji $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Na rysunku 200 mamy wykresy funkcji f i g. W zadaniu chodzi o pole zaciemnionego obszaru.

12.10. Oblicz pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji $f(x) = x^2 + 1$, osią odciętych i prostymi $x = 1$ i $x = 2$.

12.11. Oblicz pole obszaru ograniczonego od góry wykresem funkcji $f(x) = 2\sin x + 1$, osią odciętych i prostymi $x = 0$ oraz $x = \frac{\pi}{2}$.

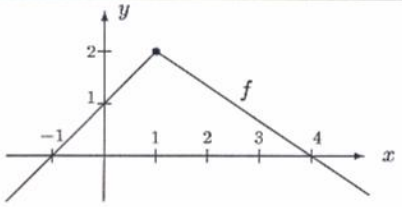
Twierdzenie 12-9 *Jeżeli funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a, b]$ i $c \in (a, b)$, to*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

12.12. Dana jest funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{dla} \quad x \leqslant 1, \\ -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3} & \text{dla} \quad x > 1. \end{cases}$$

Obszar ograniczony wykresem funkcji f (od góry) i osią odciętych (od dołu) jest trójkątem (por. rysunek 201). Znajdź jego wymiary potrzebne do obliczenia pola tego trójkąta (długość podstawy a i wysokości h) ze wzoru na pole trójkąta. Oblicz pole tego trójkąta za pomocą całki oznaczonej i sprawdź, że jest to połowa iloczynu długości podstawy i długości wysokości tego trójkąta.



Rys. 201 Trójkąt ograniczony wykresem funkcji f i osią odciętych

Z rysunku 201 wnosimy, że pole trójkąta, o którym mowa w zadaniu, jest równe $\int_{-1}^{4} f(x)dx$. Z twierdzenia 12-9 wynika, że

$$\int_{-1}^{4} f(x)dx = \int_{-1}^{1} (x+1)dx + \int_{1}^{4} (-\frac{2}{3}x + \frac{8}{3})dx.$$

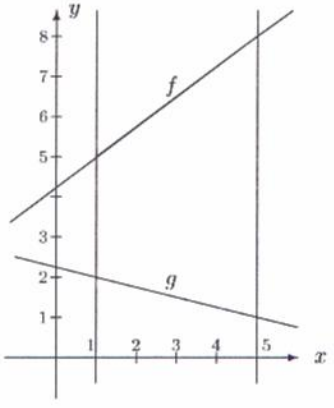
Z kolei $\int_{-1}^{1} (x+1)dx = [\frac{x^2}{2} + x]_{(-1)}^{1} = (\frac{1}{2} + 1) - (\frac{(-1)^2}{2} - 1) = 2,$

$$\int_{1}^{4} (-\frac{2}{3}x + \frac{8}{3})dx = [-\frac{x^2}{3} + \frac{8}{3}x]_{1}^{4} = (-\frac{16}{3} + \frac{32}{3}) - (-\frac{1}{3} + \frac{8}{3}) = \frac{16}{3} - \frac{7}{3} = \frac{9}{3} = 3,$$

a zatem pole rozważanego trójkąta jest równa $2 + 3$, czyli 5. Jednostką, w której to pole jest wyrażone, jest pole kwadratu $(0,1) \times (0,1)$ na płaszczyźnie z układem współrzędnych, w którym znajduje się wykres funkcji f.

Z drugiej strony podstawa rozważanego trójkąta ma długość 5, wysokość ma długość 2, a więc jego pole jest równa $\frac{5 \cdot 2}{2}$, czyli 5.

12.13. Obszar ograniczony na rysunku 202 wykresem funkcji $f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{17}{4}$ od góry, wykresem funkcji $g(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$ od dołu oraz prostymi: $x = 1$ (od lewej) i $x = 5$ (od prawej), jest trapezem (por. rysunek 202). Znajdź długości jego podstaw i wysokości oraz oblicz pole tego trapezu za pomocą znanego wzoru z geometrii. Wykaż, że to pole można znaleźć za pomocą całki oznaczonej i że jest ono tą samą liczbą, którą dostajemy ze wzoru na pole trapezu.



Rys. 202 Trapez ograniczony wykresami dwóch funkcji f i g oraz dwiema prostymi prostopadłymi do osi odciętych

12.14. Oblicz pole obszaru ograniczonego wykresami dwóch funkcji: $f(x) = x^2 + 4x$ i $g(x) = x + 4$.

Definicja 12-4 [WARTOŚĆ ŚREDNIA FUNKCJI NA PRZEDZIALE DOMKNIĘTYM] Niech f będzie funkcją całkowalną na przedziale $[a, b]$. *Wartością średnią funkcji f na przedziale* $[a, b]$ nazywamy liczbę

$$\overline{f}_{[a,b]} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

■ Znajdziemy wartość średnią funkcji $f(x) = e^x$ na przedziale $[-2, 2]$. Jest

$$\int_{-2}^{2} e^x dx = [e^x]_{-2}^{2} = e^2 - \frac{1}{e^2} = \frac{e^4 - 1}{e^2},$$

a zatem $\overline{f}_{[-2,2]} = \frac{1}{2-(-2)}\frac{e^4-1}{e^2} = \frac{e^4-1}{4e^2}$.

12.15. Wykaż, że wartością średnią funkcji $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ na przedziale $[0, 1]$ jest $\frac{\pi}{4}$.

12.16. Oblicz wartość średnią:
a) funkcji $f(x) = sgn(x)$ na przedziale $[-4, 4]$ (tę funkcję określono na s. 50);
b) funkcji $g(x) = \sin x$ na przedziale $[0, \pi]$;
c) funkcji $h(x) = x^2$ na przedziale $[-1, 1]$.

Twierdzenie 12-10 [CAŁKA FUNKCJI PARZYSTEJ] *Jeżeli funkcja całkowalna f jest parzysta i $a > 0$, to*

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

Twierdzenie 12-11 [CAŁKA FUNKCJI NIEPARZYSTEJ] *Jeżeli funkcja całkowalna f jest nieparzysta i $a > 0$, to*

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

12.17. Korzystając z twierdzeń 12-10 i 12-11 udowodnij, że:

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{e^x - 1}{e^x + 1}dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} x\sin^2 x dx = 2\int_0^{\pi} x\sin^2 x dx, \quad \int_{-2}^{2} \frac{2x^5 - x^3 + x}{x^2 + 1}dx = 0.$$

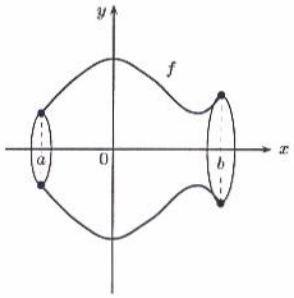
12.5. Całka a objętość i pole powierzchni brył obrotowych

Załóżmy, że funkcja nieujemna f jest ciągła na przedziale $[a, b]$. Rozważmy bryłę, która powstaje przez obrót wykresu funkcji f dookoła osi odciętych (por. rys. 203).
— Objętość V takiej bryły obrotowej wyraża się wzorem

$$V = \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

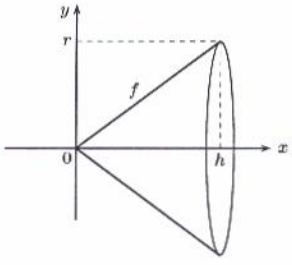
— Pole powierzchni S tej bryły obrotowej jest równe

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$



Rys. 203 Bryła powstała przez obrót funkcji f wokół osi odciętych

12.18. Ze szkolnej geometrii znamy wzory na objętość walca i pole jego pobocznicy. Walec o wysokości h i promieniu podstawy r można traktować jako bryłę obrotową powstałą z obrotu dookoła osi odciętych wykresu funkcji $f(x) = r$ rozważanej na przedziale liczbowym $[0, h]$. Korzystając ze wzorów na obliczanie objętości i pola za pomocą całki oznaczonej sprawdź, że dostajemy te same wzory, które znamy z geometrii.



Rys. 204 Stożek powstały z obrotu wykresu funkcji $f(x) = \frac{r}{h}x$, gdzie $x \in [0, h]$, wokół osi odciętych

12.19. Rozważmy funkcję $f(x) = \frac{r}{h}x$ dla $x \in [0, h]$, gdzie r i h są ustalonymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi. Jej wykresem jest odcinek. Bryła, która powstaje przez jego obrót wokół osi odciętych, jest stożkiem, którego podstawą jest koło o promieniu r i którego wysokość jest równa h (por. rys. 204).

1. Objętość V wspomnianego stożka możemy znaleźć za pomocą wzorów znanych ze szkolnej geometrii. Wykaż, że znajdując tę objętość za pomocą całki oznaczonej dostaje się tę samą wartość.

2. W geometrii znany jest wzór na pole powierzchni pobocznicy rozważanego tu stożka. Korzystając z tego wzoru oblicz to pole. Sprawdź, że tę samą wartość dostaniemy, obliczając to pole za pomocą całki oznaczonej.

□ Mamy

$$V = \pi \int_0^h (\frac{r}{h}x)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2}[\frac{1}{3}x^3]_0^h = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}.$$

12.20. Wykres funkcji $f(x) = \sin x$ dla $x \in [0, \pi]$ obrócono wokół osi odciętych. Oblicz objętość i pole powierzchni tak powstałej bryły obrotowej.

□ Niech V oznacza objętość, a S pole powstałej bryły. Mamy tu $f'(x) = \cos x$. Stosując wzór na pole powierzchni bryły obrotowej mamy $S = 2\pi \int_0^{\pi} \sin x \sqrt{1 + [\cos x]^2}\, dx$. Ostatecznie jest $S = 2\pi[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$ oraz $V = \pi^2$.

12.21. Równanie $y^2 = 8x$ przedstawia na płaszczyźnie kartezjańskiej parabolę. Jej wierzchołek leży w początku układu współrzędnych. Naszkicuj ją. Dana jest prosta prostopadła do osi odciętych w punkcie 3. Odcinek tej paraboli leżący nad osią odciętych i między osią rzędnych a wspomnianą prostą $x = 3$, zostanie obrócony dookoła osi odciętych. Oblicz objętość powstałej w ten sposób bryły obrotowej.

Zauważ, że odcinek paraboli $y^2 = 8x$, który będzie obracany, jest wykresem funkcji $f(x) = 2\sqrt{2x}$ dla $x \in (0, 3)$.



Rys. 205 Gracze w kości i karty w salonie gier hazardowych. Drzeworyt Cornelisa Teunissena z r. 1540

13. Liczby zespolone

13.1. Zbiór liczb zespolonych i działania w tym zbiorze

Równanie $x^2 - 1 = 0$ ma dwa pierwiastki w zbiorze liczb rzeczywistych: $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$. W zbiorze liczb rzeczywistych nie ma pierwiastków równanie $x^2 + 1 = 0$. Próby rozwiązywania równania $x^2 + 1 = 0$ doprowadziły do rozszerzenia pojęcia liczby tak, aby w tym nowym zbiorze liczb każde równanie kwadratowe posiadało pierwiastki.

Oznaczmy symbolem i liczbę, której kwadrat jest równy -1. Nie jest to liczba rzeczywista, wszak w zbiorze $\mathbb{R}$ nie ma takiej liczby x, dla której $x^2 = -1$. Tę nową liczbę i nazywamy *jednostką urojoną*[25]

Na wzór potęgi liczby rzeczywistej wprowadźmy potęgi liczby i o wykładnikach naturalnych. Mamy więc:

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i, \quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1, \quad i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i.$$

Dla wykładników ujemnych jest np.: $i^{-5} = \frac{1}{i^5} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$.

Definicja 13-1 [LICZBA ZESPOLONA] Niech a i b będą liczbami rzeczywistymi. Parę (a, b) nazywamy *liczbą zespoloną*, a nazywamy jej *częścią rzeczywistą*, b zaś – *częścią urojoną*. Liczbę zespoloną (a, b) zapisujemy w postaci $a + bi$, gdzie i jest jednostką urojoną. Zapis $a + bi$ nazywamy *postacią algebraiczną liczby zespolonej* (a, b). Zbiór $\{z : (z = a+bi) \wedge (a \in \mathbb{R}) \wedge (b \in \mathbb{R})\}$ nazywamy *zbiorem liczb zespolonych* i oznaczamy symbolem $\mathbb{C}$. Parę $(0, 0)$, a więc liczbę zespoloną $0 + 0i$ nazywamy *zerem zespolonym*. Liczbę zespoloną $(-a - bi)$ nazywamy *przeciwną do liczby zespolonej* $a + bi$. Część rzeczywistą liczby zespolonej z oznacza się symbolem $Re\ z$, część urojoną zaś – symbolem $Im\ z$.

Z definicji 13-1 wynika, że dwie liczby zespolone $z_1 = a_1 + b_1 i$ oraz $z_2 = a_2 + b_2 i$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2$ oraz $b_1 = b_2$. Liczba zespolona $z = a + bi$ jest zerem zespolonym wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$ i $b = 0$. Liczba zespolona $z = a + bi$ jest różna od zera zespolonego (piszemy $z \neq 0$) wtedy i tylko wtedy, gdy $a \neq 0$ lub $b \neq 0$, a więc gdy $a^2 + b^2 > 0$.

Liczbą zespoloną jest każda para $(a, 0)$, gdzie $a \in \mathbb{R}$. Liczbę rzeczywistą a możemy zapisać w postaci $a + 0i$, a więc utożsamiać z liczbą zespoloną $a + 0i$. Tym samym zbiór liczb rzeczywistych staje się podbiorem zbioru liczb zespolonych ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).

Liczbę zespoloną (a, b) możemy utożsamiać z punktem o współrzędnych (a, b) na płaszczyźnie kartezjańskiej (por. rys. 206). Mówimy tu o *geometrycznej interpretacji liczby zespolonej*. Punkty osi odciętych reprezentują liczby zespolone postaci $a + 0i$, czyli liczby rzeczywiste, punkty osi rzędnych zaś – liczby zespolone postaci bi.

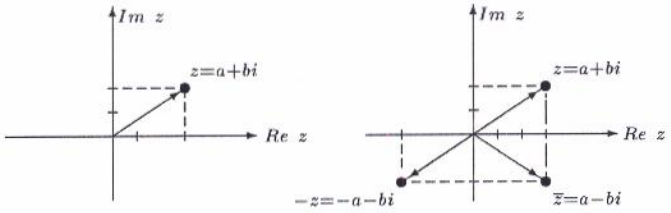
Liczbę zespoloną $z = a + bi$ możemy utożsamiać z wektorem o początku w punkcie $(0, 0)$ i końcu w punkcie o współrzędnych (a, b) (por. rys. 206). Wektor, o którym mowa, nazywamy *wektorem wodzącym liczby zespolonej* $z = a + bi$.

Definicja 13-2 [PŁASZCZYZNA GAUSSA] Płaszczyznę z układem współrzędnych, której punkty interpretujemy jako liczby zespolone, nazywamy *płaszczyzną Gaussa*.

[25] Symbol i na oznaczenie tej liczby pochodzi od pierwszej litery łacińskiego słowa *imaginarius*, tzn. „urojony".

Definicja 13-3 [LICZBA ZESPOLONA SPRZĘŻONA] Liczbę zespoloną $a - bi$ nazywamy *sprzężoną z liczbą* $z = a + bi$ i oznaczamy symbolem $\overline{z}$.

■ Liczba zespolona $2 - 5i$ jest sprzężona z liczbą $2 + 5i$. Ale także liczba $2 + 5i$ jest sprzężona z liczbą $2 - 5i$. O liczbach zespolonych $a + bi$ oraz $a - bi$ możemy więc mówić, że *są sprzężone*. Liczbą sprzężoną do liczby zespolonej $13i$ jest liczba $-13i$.



Rys. 206 Liczby zespolone: $z = a + bi$, sprzężona $\overline{z} = a - bi$ i przeciwna $-z = -a - bi$ w interpretacji geometrycznej

13.1. Niech $z = 3 + 2i$. Znajdź liczby zespolone $-z$, $\overline{z}$ i $\overline{\overline{z}}$. Znajdź $\overline{7 - 3i}$ oraz $-\overline{(-5 - i)}$.

13.2. Jaki zbiór na płaszczyźnie Gaussa przedstawiają liczby zespolone z, dla których: a) $z = \overline{z}$, b) $Re\, z = 1$, c) $Im\, z = 2$, d) $Im\, z = Re\, z$?

Definicja 13-4 [SUMA LICZB ZESPOLONYCH] *Sumą liczb zespolonych* $z_1 = a_1 + b_1 i$ *oraz* $z_2 = a_2 + b_2 i$ nazywamy liczbę zespoloną

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$

tj. liczbę zespoloną, której część rzeczywista jest sumą części rzeczywistych a część urojona – sumą części urojonych składników tej sumy.

■ Sumą liczb zespolonych $z_1 = 2 - 7i$ oraz $z_2 = \pi + 2i$ jest liczba zespolona

$$z_1 + z_2 = (2 + \pi) + (-7 + 2)i = (2 + \pi) - 5i.$$

Uwaga: Znak + w definicji sumy $z_1 + z_2$ oznacza dodawanie w zbiorze liczb zespolonych, a więc oznacza co innego niż znak + w zapisie $a_1 + a_2$ i $b_1 + b_2$. W tych dwu ostatnich zapisach jest to znak dodawania w zbiorze $\mathbb{R}$.

Definicja 13-5 [RÓŻNICA LICZB ZESPOLONYCH] Niech $z_1 = a_1 + b_1 i$ i $z_2 = a_2 + b_2 i$. *Różnicą liczb zespolonych* z_1 *i* z_2 nazywamy liczbę zespoloną

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i,$$

tj. liczbę zespoloną, której część rzeczywista jest różnicą części rzeczywistych a część urojona – różnicą części urojonych.

Definicja 13-6 [ILOCZYN LICZB ZESPOLONYCH] Niech $z_1 = a_1 + b_1 i$ i $z_2 = a_2 + b_2 i$. *Iloczynem liczb zespolonych* z_1 *oraz* z_2 nazywamy liczbę zespoloną

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)i.$$

■ Iloczynem liczb zespolonych $z_1 = 2 - 7i$ oraz $z_2 = \pi + 2i$ jest liczba zespolona

$$z_1 \cdot z_2 = [2 \cdot \pi - (-7) \cdot 2] + [2 \cdot 2 + \pi \cdot (-7)] = (2\pi + 14) + (4 - 7\pi)i.$$

Twierdzenie 13-1 [WŁASNOŚCI DZIAŁAŃ W ZBIORZE LICZB ZESPOLONYCH] *Jeżeli z_1, z_2 i z_3 są dowolnymi liczbami zespolonymi, to:*
1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ *(dodawanie w zbiorze liczb zespolonych jest przemienne),*
2) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ *(dodawanie w zbiorze liczb zespolonych jest łączne),*
3) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ *(mnożenie w zbiorze liczb zespolonych jest przemienne),*
4) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ *(mnożemie jest w zbiorze liczb zespolonych łączne),*
5) $z_1(z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ *(mnożenie liczb zespolonych jest rozdzielne względem dodawania).*

13.3. Niech $0 = 0 + 0i$ oraz $1 = 1 + 0i$. Znajdź $z + (-z)$ oraz $z \cdot 1$ dla liczby zespolonej $z = \sqrt{3} + 13i$. Wykaż, że dla każdej liczby zespolonej z jest $z + (-z) = 0$ oraz $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$.

13.4. Niech $z = \sqrt{3} + 13i$. Znajdź $z \cdot \overline{z}$. Wykaż, że jeśli $z = a + bi$, to $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$.

13.5. Wykaż, że dla każdych dwu liczb zespolonych z_1 i z_2 jest:
a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, c) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$.

Definicja 13-7 [ODWROTNOŚĆ LICZBY ZESPOLONEJ] Niech $z = a + bi$. Załóżmy, że $z \neq 0 + 0i$, a więc że $a \neq 0$ i $b \neq 0$. Liczbę zespoloną $\frac{a}{a^2-b^2} - \frac{b}{a^2-b^2}i$ nazywamy *odwrotnością liczby zespolonej* z i oznaczamy przez $\frac{1}{z}$.

13.6. Udowodnij, że dla każdej liczby zespolonej $z \neq 0$ jest $z \cdot \frac{1}{z} = 1$, gdzie $1 = 1 + 0i$. Znajdź odwrotność liczby zespolonej $3 - 4i$. Znajdź $\frac{1}{z}$, jeśli $z = i = 0 + 1i$?

Definicja 13-8 [ILORAZ LICZB ZESPOLONYCH] *Ilorazem liczb zespolonych z_1 oraz z_2,* gdzie $z_2 \neq 0 + 0i$, nazywamy liczbę zespoloną $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$.

W zbiorze $\mathbb{C}$ liczb zespolonych wprowadziliśmy więc działania dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia o analogicznych własnościach, jakie mają odpowiednio suma, różnica, iloczyn i iloraz w zbiorze $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych.

UWAGA! W zbiorze $\mathbb{C}$ liczb zespolonych nie da się wprowadzić analogicznych relacji, jakimi są nierówności $(<, >, \leqslant, \geqslant)$ w zbiorze $\mathbb{R}$.

Liczby zespolone pojawiły się w matematyce w XVI wieku. Pierwszy wprowadził je w r. 1545 Cardano[26]. W r. 1572 R. Bombelli[27] opublikował reguły działań na liczbach zespolonych. Ścisłą teorię liczb zespolonych podał w wieku XIX Gauss[28]

13.7. Niech $z_1 = 3 - 4i$ oraz $z_2 = 2 + i$. Oblicz sumę, różnicę, iloczyn i iloraz liczb zespolonych z_1 oraz z_2.

□ Mamy tu
$$z_1 + z_2 = (3 - 4i) + (2 + i) = (3 + 2) + (-4 + 1)i = 5 - 3i,$$
$$z_1 - z_2 = (3 - 4i) - (2 + i) = (3 - 2) + (-4 - 1)i = 1 - 5i,$$
$$z_1 \cdot z_2 = (3 - 4i) \cdot (2 + i) = 6 + 4 - 8i + 3i = 10 - 5i,$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3-4i}{2+i} = \frac{6-4-8i-3i}{4+1} = \frac{2-11i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{11}{5}i.$$

[26] Geronimo Cardano (1501-1576), włoski matematyk i filozof.
[27] Raffaele Bombelli (1530-1572), matematyk włoski.
[28] Carl Friedrich Gauss (1777-1855), niemiecki matematyk, fizyk i astronom.

13.8. Wykonaj działania $(\sqrt{2}-i)\cdot(3+\sqrt{3}i)$ oraz $\frac{2-3i}{1+4i}$.

□ Mamy tu:

$$(\sqrt{2}-i)\cdot(3+\sqrt{3}i) = (\sqrt{2}\cdot 3-(-1)\cdot\sqrt{3})+(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+(-1)\cdot 3)i = (3\sqrt{2}+\sqrt{3})+(\sqrt{6}-3)i$$

oraz

$$\frac{2-3i}{1+4i} = \frac{(2-3i)\cdot(1-4i)}{(1+4i)\cdot(1-4i)} = \frac{2+8i-3i-12i^2}{1-16i^2} = \frac{2+5i+12}{1+16} = \frac{14+5i}{17} = \frac{14}{17}+\frac{5}{17}i.$$

13.9. Znajdź liczby rzeczywiste x i y spełniające równanie $(2+3i)x+(4-5i)y = 6-2i$.

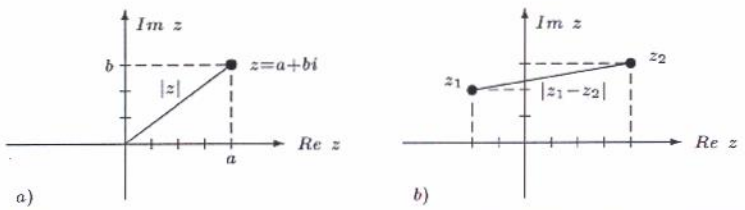
13.10. Jaki zbiór punktów na płaszczyźnie Gaussa tworzą liczby zespolone z, dla których: a) $Re\ z > 1$, b) $-1 < Re\ z < 1$, c) $-3 \leqslant Im\ z \leqslant 3$?

13.11. W zbiorze liczb zespolonych rozwiąż następujące równania:
a) $z^2 = i$, b) $z^2 = 8+6i$, c) $z^2 - 3 = 4i$, d) $2z + (3-i)\cdot\overline{z} = 5+4i$.

13.2. Moduł i argument liczby zespolonej

Definicja 13-9 [MODUŁ LICZBY ZESPOLONEJ] *Modułem liczby zespolonej* $z = a+bi$ nazywamy liczbę rzeczywistą $|z|$ określoną wzorem $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Moduł liczby zespolonej z jest odległością tej liczby z na płaszczyźnie Gaussa od liczby $z_0 = 0$. Moduł różnicy liczb zespolonych z_1 i z_2 jest odległością tych liczb na płaszczyźnie Gaussa. Tłumaczy te fakty rysunek 207.



Rys. 207 Moduł liczby zespolonej i moduł różnicy dwóch liczb zespolonych w interpretacji geometrycznej

Powróćmy do wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej (por. s. 23). Przypomnijmy, że jeśli $x \in \mathbb{R}$ i $y \in \mathbb{R}$, to w interpretacji geometrycznej:

$|x|$, czyli wartość bezwzględna liczby rzeczywistej x jest odległością tej liczby od początku osi,

$|x-y|$, tj. wartość bezwzględna różnicy dwu liczb rzeczywistych x i y, jest odległością tych liczb na osi liczbowej (por. s. 23).

Moduł liczby zespolonej jest odpowiednikiem pojęcia wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej.

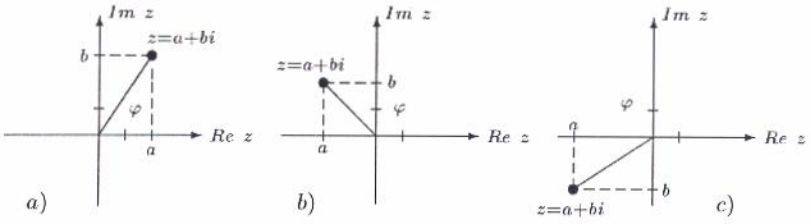
Twierdzenie 13-2 [NIERÓWNOŚĆ TRÓJKĄTA] *Jeżeli* z_1 *i* z_2 *są liczbami zespolonymi, to* $|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$.

13.12. Niech z_1 i z_2 będą dowolnymi liczbami zespolonymi. Wykaż, że
a) $|\overline{z}| = |z| = |-z|$, b) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

13.13. Znajdź moduły liczb zespolonych: $z_1 = 1 - 3i$, $z_2 = -3 - 4i$, $z_3 = \frac{4+1}{3+2i}$.

13.14. Korzystając z geometrycznej interpretacji modułu liczby zespolonej, przedstaw na płaszczyźnie Gaussa zbiory liczb zespolonych spełniających warunki:
a) $|6 + z \cdot 2i| \leqslant 4$, b) $|z + i| = 7$,
c) $|z - 3i| = |z + 5|$, d) $1 \leqslant |z - z_0| < 2$, gdzie $z_0 = 3 + 4i$.

Niech $z = a + bi$ będzie liczbą zespoloną różną od zera (zespolonego), a więc $a \neq 0$ i $b \neq 0$. Moduł liczby z (tj. liczba rzeczywista $\sqrt{a^2 + b^2}$) jest jej odległością od liczby zespolonej $z_0 = 0 + 0i$ na płaszczyźnie Gaussa. Zauważmy, że iloraz $\frac{a}{a^2+b^2}$, czyli $\frac{a}{|z|}$, jest równy $\cos\varphi$, iloraz $\frac{b}{a^2-b^2}$, czyli $\frac{b}{|z|}$, jest równy $\sin\varphi$, gdzie φ jest kątem utworzonym przez dodatnią półoś rzeczywistą i wektor wodzący liczby zespolonej z (por. rysunek 208).



Rys. 208 Argument liczby zespolonej $z = a + bi$ różnej od zera

Definicja 13-10 [ARGUMENT LICZBY ZESPOLONEJ] *Argumentem liczby zespolonej* $z = a + bi$ $(z \neq 0 + 0i)$ nazywamy każdą liczbę rzeczywistą φ spełniającą układ warunków:

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} \quad \text{oraz} \quad \sin\varphi = \frac{b}{|z|}.$$

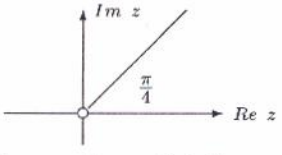
Argumentem głównym liczby zespolonej $z = a + bi \neq 0 + 0i$ nazywamy argument φ tej liczby z spełniający nierówność $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Argument główny liczby zespolonej oznaczamy przez $arg\ z$.

Każdy argument φ liczby zespolonej $z = a + bi \neq 0 + 0i$ ma postać

$$\varphi = arg\ z + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

13.15. Znajdź argumenty główne liczb zespolonych:

$$z_1 = -3 + 3i, \quad z_2 = i, \quad z_3 = -1 - i, \quad z_4 = 1 - i\sqrt{3}.$$



Rys. 209 Zbiór liczb zespolonych z na płaszczyźnie Gaussa, dla których $arg\ z = \frac{\pi}{4}$

13.16. Na płaszczyźnie Gausa zaznacz zbiory liczb zespolonych, które spełniają warunki: a) $arg\ z = \frac{\pi}{4}$, b) $arg\ (z + i) = \pi$, c) $arg\ z = \frac{\pi}{3}$.

Liczby zespolone z spełniające warunek $arg\ z = \frac{\pi}{4}$ tworzą półprostą przedstawioną na rysunku 209.

13.3. Trygonometryczna postać liczby zespolonej

Definicja 13-11 [POSTAĆ TRYGONOMETRYCZNA LICZBY ZESPOLONEJ] Liczbę zespoloną $z = a + bi$ można przedstawić w postaci $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, gdzie $\varphi = arg\ z$. Ten zapis $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ nazywamy *postacią trygonometryczną liczby zespolonej z*.

■ Rozważmy liczbę zepoloną $z = 1 + i$. Mamy tu $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ oraz $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\varphi$, a zatem $\varphi = \frac{\pi}{4} = arg\ z$. Liczba zespolona $z = 1+i$ ma zatem następującą postać trygonometryczną: $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$.

■ Nietrudno sprawdzić, że

$$1 = 1(\cos 0 + i\sin 0),$$
$$1 - i = \sqrt{2}[\cos(-\tfrac{\pi}{4}) + i\sin(-\tfrac{\pi}{4}] = \sqrt{2}(\cos\tfrac{\pi}{4} - i\sin\tfrac{\pi}{4}),$$
$$1 - \sqrt{3}i = 2(\cos\tfrac{-\pi}{3} + i\sin\tfrac{-\pi}{3}) = 2(\cos\tfrac{\pi}{3} - i\sin\tfrac{\pi}{3}).$$

13.17. Dane są liczby zespolone:

$$z_1 = i,\ z_2 = -1 - i,\ z_3 = i,\ z_4 = \sqrt{2} - i\sqrt{2},\ z_5 = 1 + i\sqrt{3}.$$

Przedstaw każdą z nich w postaci trygonometrycznej

Twierdzenie 13-3 [ILOCZYN I ILORAZ LICZB ZESPOLONYCH W POSTACI TRYGONOMETRYCZNEJ] *Jeżeli* $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ *oraz* $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, *to*

$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$;

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$, *jeśli* $z_2 \neq 0$.

Twierdzenie 13-3 orzeka zatem, że:

— moduł iloczynu dwu liczb zespolonych jest równy iloczynowi ich modułów, a argument iloczynu jest równy sumie argumentów tych liczb;

— moduł ilorazu dwu liczb zespolonych jest równy ilorazowi ich modułów, a argument ilorazu jest równy różnicy argumentu dzielnej i argumentu dzielnika.

13.18. Wykorzystując postać trygonometryczną liczby zespolonej wykonaj następujące działania: a) $(1 + i)(1 - i\sqrt{3})$, b) $(\sqrt{3} + i)(1 + i\sqrt{3})$, c) $\frac{1}{1+i}$, d) $(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})^2$.

Z twierdzenia 13-3 wynika następujące twierdzenie:

Twierdzenie 13-4 *Jeżeli* $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, *to:*

$z^2 = |z|^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$ *oraz* $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

Z twierdzenia 13-4 wynika, że

$$\text{jeżeli } |z| = 1, \text{ to } z^n = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin\varphi.$$

Równość $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin\varphi$ nosi nazwę *wzoru de Moivre'a*[29].

13.19. Korzystając ze wzoru de Moivre'a oblicz:

a) $(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^{20}$, b) $(1 + i)^{10}$, c) $(\sqrt{3} - i)^{60}$, d) $(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)^{-3}$.

□ Liczbę zespoloną $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ przedstawmy w postaci trygonometrycznej. Mamy $|z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$, $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ i $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, a więc $\varphi = \frac{\pi}{3}$, czyli $z = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$.

[29] Abraham de Moivre (1667-1754), matematyk angielski pochodzenia francuskiego.

Ze wzoru de Moivre'a dostajemy, że

$$z^{20} = (\cos\tfrac{\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pi}{3})^{20} = \cos\tfrac{20\pi}{3} + i\sin\tfrac{20\pi}{3} = \cos(6\pi + \tfrac{2}{3}\pi) + i\sin(6\pi + \tfrac{2}{3}\pi) = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i.$$

13.4. Pierwiastki z liczby zespolonej

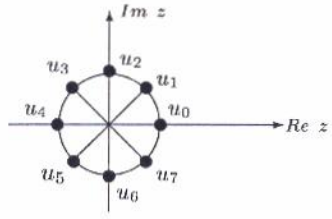
Definicja 13-12 [n-TY PIERWIASTEK Z LICZBY ZESPOLONEJ] Niech $z = a+bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. Niech $n \in \mathbb{N}_1$. Każdą liczbę zespoloną u spełniającą równanie $u^n = z$ nazywamy *n-tym pierwiastkiem z liczby zespolonej* z i oznaczamy $u = \sqrt[n]{z}$.

Twierdzenie 13-5 *Niech $z = a+bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ i $a^2+b^2 > 0$ (czyli $z \neq 0$). Niech $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Istnieje dokładnie n różnych pierwiastków n-tego stopnia z liczby zespolonej z, które wyrażają się wzorami:*

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}(\cos\tfrac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\tfrac{\varphi+2k\pi}{n}), \quad \text{gdzie} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Wszystkie pierwiastki n-tego stopnia z liczby zespolonej z mają równe moduły, a zatem na płaszczyźnie Gaussa leżą one na tym samym okręgu o środku w punkcie $(0,0)$ i promieniu $r = |z|$. Wszystkie te pierwiastki dzielą wspomniany okrąg na n równych części. Wystarczy zatem znaleźć np. pierwiastek odpowiadający $k = 0$.

■ Na uwagę zasługują n-te pierwiastki z liczby zespolonej $z = 1 + 0i$. Wszystkie one leżą na okręgu $|z| = 1$. Aby wyznaczyć te pierwiastki wystarczy podzielić okrąg $|z| = 1$ na n równych części, poczynając od punktu $(1,0)$. Na rys. 210 przedstawiono na płaszczyźnie Gaussa wszystkie pierwiastki ósmego stopnia z liczby zespolonej $z = 1+i$.



Rys. 210 Pierwiastki ósmego stopnia z liczby zespolonej $z = 1 + i$

Punkty na płaszczyźnie Gaussa, w których okrąg $|z| = 1$ przecina osie $Re\ z$ i $Im\ z$, są pierwiastkami czwartego stopnia z liczby zespolonej $z = 1 + 0i$. Pierwiastki czwartego stopnia z liczby zespolonej $z = 1 + 0i$ (czyli z jedności) są następującymi liczbami zespolonymi: $1 + 0i$, $0 + i$, $-1 + 0i$ oraz $0 - i$.

13.20. Niech $z_1 = i$, $z_2 = -4$, $z_3 = \sqrt{3} - i$. Oblicz $\sqrt[3]{z_1}$, $\sqrt{z_2}$ oraz $\sqrt[3]{z_3}$.

Mamy $|z_1| = |0+i| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$. Argumentem liczby zespolonej z_1 jest $\varphi = \frac{\pi}{2}$, czyli $z_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$. Ze wzoru na pierwiastki n-tego stopnia z liczby zespolonej dostajemy trzy następujące pierwiastki:

$$u_0 = \cos\tfrac{\pi}{3\cdot 2} + i\sin\tfrac{\pi}{3\cdot 2} = (\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}i),$$

$$u_1 = \cos\tfrac{5\pi}{6} + i\sin\tfrac{5\pi}{6} = (-\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}i),$$

$$u_2 = \cos\tfrac{3\pi}{2} + i\sin\tfrac{3\pi}{2} = -i.$$

Jest $|z_2| = |-4| = 4$ i $\varphi = \pi$, a zatem:

$u_0 = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 2i,$

$u_1 = 2(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = -2i.$

Dla liczby zespolonej z_3 mamy: $|z_3| = |\sqrt{3}-i| = 2$ ora $\varphi = -\frac{\pi}{6}$, a zatem szukanymi pierwiastkami z liczby zespolonej z_3 są liczby zespolone:

$u_0 = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{\pi}{18} - i\sin\frac{\pi}{18}),$

$u_0 = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{11\pi}{18} + i\sin\frac{11\pi}{18}),$

$u_0 = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{23\pi}{18} - i\sin\frac{23\pi}{18}).$

13.5. Równanie kwadratowe w zbiorze liczb zespolonych

Równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$ nie posiada pierwiastków w zbiorze $\mathbb{R}$ jeśli $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

Rozważmy to równanie kwadratowe w zbiorze $\mathbb{C}$. W zbiorze liczb zespolonych jest $\sqrt{\Delta} = i\sqrt{-\Delta}$, a więc wstawiając do wzorów na x_1 i x_2 (por. s. 79) dostajemy, że

$$x_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{oraz} \quad x_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Te pierwiastki równania kwadratowego są liczbami sprzężonymi.

Rozważmy równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie a, b i c są liczbami zespolonymi i $a \neq 0$. W zbiorze liczb zespolonych każde równanie kwadratowe ma pierwiastki.

■ Rozwiążmy równanie kwadratowe $x^2 + 2ix + 3 = 0$. Mamy tu $\Delta = (2i)^2 - 12 = -4 - 12 = -16$, a zatem $\sqrt{\delta} = 4i$, czyli pierwiastkami równania są:

$$x_1 = \frac{-2i-4i}{2} = 3i \quad \text{oraz} \quad x_2 = \frac{-2i+4i}{2} = i.$$

Sprawdź, że $(x_1)^2 + 2ix_1 + 3 = 0$ i $(x_2)^2 + 2ix_2 + 3 = 0$.

13.21. Rozwiąż równanie $x^2 - 4x + 13 = 0$ w zbiorze liczb zespolonych.

13.22. Rozwiąż równania kwadratowe:

a) $x^2 + 4 = 0$,

b) $x^2 + 2i = 0$,

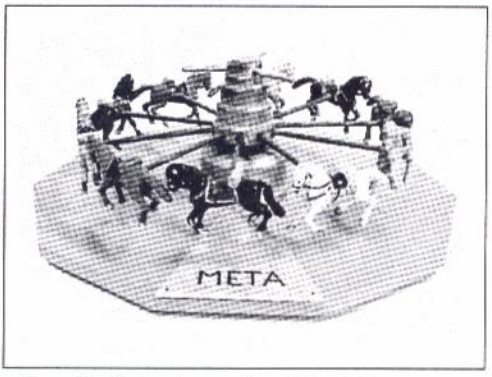
c) $x^2 - (2 + 3i)x - 1 + 3i = 0$.

13.23. Rozwiąż równanie $x^2 - 5x + 7 + i = 0$.

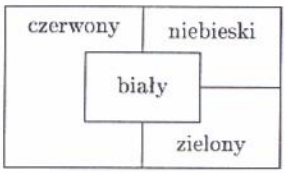
14. Uzupełnienia

14.1. Funkcje wielu zmiennych

■ [HAZARDOWA GRA LOSOWA „KARUZELA Z KONIKAMI'] W ub. wieku na krakowskich placach targowych oferowano hazardową grę losową, w której rekwizytem była karuzela z dziesięcioma konikami: jednym białym, trzema czerwonymi, trzema niebieskimi i trzema zielonymi (zob. rysunek 211).



Rys. 211 Stara karuzela z dziesięcioma konikami



Rys. 212 Plansza do obstawiania

Po wprawieniu w ruch, karuzela szybko się kręci. Kolor konika, który zatrzyma się na mecie jest wylosowanym kolorem. Są cztery wyniki tego doświadczenia losowego:

b – `na mecie zatrzyma się konik biały`,
c – `na mecie zatrzyma się konik czerwony`,
n – `na mecie zatrzyma się konik niebieski`,
z – `na mecie zatrzyma się konik zielony`.

Zanim karuzela ruszy, gracz obstawia kolor, kładąc stawkę z zł na wybranym polu na planszy (rysunek 212). Niech $z = 1$. Mówimy o trafnym typowaniu, ilekroć obstawiony kolor zostaje kolorem wylosowanym. Jeśli na mecie zatrzyma się biały konik, to gracz, który postawił 1 zł na biały kolor, wygrywa 5 zł, jeśli zaś konik innego koloru, to postawiona złotówka trafia do kasy bankiera. Jeśli typowanie na którykolwiek z pozostałych kolorów okaże się trafne, to gracz wygrywa 2 zł, w przeciwnym razie traci postawioną złotówkę. Wygrana gracza zależy od decyzji co do obstawianego koloru i od wyniku losowania koloru. Są cztery możliwe decyzje:

d_b: *stawiam na kolor biały*, d_c: *stawiam na kolor czerwony*,
d_n: *stawiam na kolor niebieski*, d_z: *stawiam na kolor zielony*.

Zbiór $D = \{d_b, d_c, d_n, d_z\}$ nazywa się *zbiorem decyzji dopuszczalnych*.

Modelem probabilistycznym losowania koloru za pomocą karuzeli konikami jest przestrzeń probabilistyczna (Ω, p), gdzie

$$\Omega = \{n, z, c, b\} \quad \text{oraz} \quad p(b) = \tfrac{1}{10}, \ p(n) = p(z) = p(c) = \tfrac{3}{10}.$$

Zainteresujmy się wygraną gracza w sytuacji, gdy jeszcze nie podjął decyzji co do obstawianego koloru, a więc gdy również losowanie koloru jeszcze się nie odbyło. Oznaczmy tę wygraną przez W. Wygrana W zależy od:

1) decyzji co do obstawianego koloru oraz od
2) wyniku losowania koloru.

Jeśli gracz postawi na biały kolor, a wylosowany następnie kolor okaże się czerwony, to wygrana gracza jest równa 0.

Każdej parze (*decyzja, wynik losowania*) odpowiada dokładnie jedna liczba, będąca wygraną gracza. Mowa tu więc o funkcji W, której dziedziną jest iloczyn kartezjański $D \times \Omega$, wartości zaś są liczbami ze zbioru $\{0, 2, 5\}$. Jest więc

$$W : \{d_b, d_c, d_n, d_z\} \times \{b, c, n, z\} \longrightarrow \mathbb{N}.$$

Ta funkcja W określona jest za pomocą następującej tabeli:

decyzja ↓ | *wynik* ω →	b	c	n	z
d_b	5	0	0	0
d_c	0	2	0	0
d_n	0	0	2	0
d_z	0	0	0	2

Jest to *funkcja dwu zmiennych*: decyzji co do obstawianego koloru i wyniku losowania.

Po podjęciu decyzji co do obstawianego koloru, ale przed losowaniem koloru wygrana gracza zależy już tylko od wyniku losowania, a zatem jest funkcją jednej zmiennej (tą zmienną jest wynik losowania koloru). Jeśli gracz postawił złotówkę na białym polu (czyli, gdy podjął decyzję d_b), to jego wygrana (mówimy o niej zanim ruszy karuzela!) jest funkcją W_b określoną na zbiorze $\Omega = \{b, c, n, z\}$ następująco:

W_b:

wynik losowania ω:	b	c	n	z
wygrana $W_b(\omega)$:	5	0	0	0

Funkcja W_b, jako funkcja określona na zbiorze wyników pewnego doświadczenia losowego, jest zmienną losową (por. s. 180).

Wygrana gracza po podjęciu decyzji, ale przed losowaniem koloru, jest funkcją jednej zmiennej (tą zmienną jest wynik losowania). Wygrana gracza przed podjęciem decyzji co do obstawianego koloru jest funkcją W dwu zmiennych: decyzji i wyniku losowania.

ZAUWAŻ, JAK WAŻNY JEST W TYCH ROZWAŻANIACH CZAS!

14.1. Dla każdej decyzji co do obstawianego koloru znajdź wartość oczekiwaną wygranej gracza. Czy i jak znalezione wielkości tłumaczą prosperowanie tego hazardu?

Jeśli gracz postawił 1 zł na białym polu (decyzja d_b), to jego wygrana jest zmienną losową W_b określoną w tabeli wyżej. Ta zmienna losowa przyjmuje dwie wartości: 5 z prawdopodobieństwem $\frac{1}{10}$ i 0 z prawdopodobieństwem $\frac{9}{10}$, a zatem z definicji wartości oczekiwanej (por. definicja 9-14 na s. 190) wynika, że

$$E(W_b) = 0 \cdot \tfrac{9}{10} + 5 \cdot \tfrac{1}{10} = \tfrac{1}{2}.$$

Gracz wpłaca 1 zł, jego oczekiwana wygrana wynosi zaś 50 gr. Oznacza to, że z każdej złotówki postawionej przez gracza na biały kolor jej połowa (tj. 50 gr) trafia do kasy bankiera.

Nietrudno sprawdzić, że

$$E(W_c) = \tfrac{6}{10}, \quad E(W_n) = \tfrac{6}{10}, \quad E(W_z) = \tfrac{6}{10}.$$

W przypadku każdej decyzji, oczekiwana wygrana gracza jest mniejsza od wpłaconej kwoty. Hazard nie jest dla gracza korzystny. Bankier może więc liczyć na zyski. W sytuacji, gdy gracz zagra 1000 razy, bankier może oczekiwać zysków. W przypadku koloru b (decyzja d_b) jest to kwota: 500 zł, w przypadku koloru c (decyzja d_c) jest to kwota: 400 zł. Identyczny jest oczekiwany zysk w przypadku pozostałych decyzji. Oczekiwana wygrana gracza w jednej grze jest najmniejsza w przypadku decyzji d_b. Ta decyzja jest dla gracza najmniej korzystna.

Definicja 14-1 [FUNKCJA DWU ZMIENNYCH] Niech A, B i Z będą dowolnymi niepustymi zbiorami i $V \subset A \times B$. Załóżmy, że $V \neq \emptyset$. Funkcję $f : V \longrightarrow Z$, a więc funkcję, która każdej parze (x, y) ze zbioru V przypisuje dokładnie jeden element zbioru Z, nazywamy *funkcją dwu zmiennych*. Jeśli parze $(x, y) \in V$ funkcja f przypisuje element z ze zbioru Z, to piszemy: $f(x, y) = z$. Element z nazywamy *wartością funkcji f w punkcie (x, y)*.

Analogicznie określa się funkcje trzech lub więcej zmiennych. Wśród funkcji wielu zmiennych wyróżniamy te, których wartościami są liczby rzeczywiste ($Z = \mathbb{R}$).

Definicja 14-2 [MIEJSCE ZEROWE FUNKCJI WIELU ZMIENNYCH] Niech f będzie funkcją dwu zmiennych ale o wartościach ze zbioru $\mathbb{R}$. Każdą parę (x, y), dla której $f(x, y) = 0$ nazywamy *miejscem zerowym funkcji dwu zmiennych f*.

■ Niech $A = \{a, b, c\}$ i $B = \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$. Poniższa tabela określa funkcję dwu zmiennych f ze zbioru $A \times B$ w zbiór liczb rzeczywistych.

$\times$	$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\heartsuit$	$\diamondsuit$
a	0	π	-2	$\frac{1}{2}$
b	-8	0	e	17
c	$\sqrt{3}$	17	5	$-\pi$

Jest np. $f(a, \spadesuit) = \pi$, $f(c, \spadesuit) = 17$, $f(a, \clubsuit) = 0$. Para $(a, \clubsuit)$ jest miejscem zerowym tej funkcji f dwu zmiennych. Miejscem zerowym tej funkcji jest także para $(b, spadesuit)$.

■ Każdy punkt a na płaszczyźnie euklidesowej i dodatnia liczba rzeczywista r określają jednoznacznie okrąg $0(a, r)$, którego środkiem jest punkt a, długość promienia zaś jest równa r. Niech A będzie zbiorem punktów na płaszczyźnie euklidesowej, B zbiorem liczb rzeczywistych dodatnich, Z zaś zbiorem okręgów na płaszczyźnie. Mówimy tu o funkcji dwu zmiennych, która każdej parze (a, r), gdzie $a \in A$ i $r \in B$ przypisuje dokładnie jeden okrąg ze zbioru Z.

■ Niech a będzie punktem płaszczyzny euklidesowej, r zaś liczbą rzeczywistą dodatnią. W geometrii mówi się o przekształceniu, zwanym *jednokładnością o środku w punkcie a i skali r*. Oznaczmy to przekształcenie przez J_a^r. Jeśli a i r są ustalone, to J_a^r jest funkcją (jednej zmiennej), która:
— punktowi $b \neq a$ przypisuje punkt $b' = J_a^r(b)$ taki, że punkty a, b i b' leżą na półprostej o początku w punkcie a i przechodzącej przez punkt b i $|ab'| = r \cdot |ab|$, gdzie $|ax|$ oznacza długość odcinka o końcach w punktach a i x,
— punktowi $b = a$ przypisuje punkt $b' = a$, czyli $J_a^r(a) = a$ (a jest punktem stałym przekształcenia J_a^r).

Niech A oznacza płaszczyznę euklidesową, B zaś zbiór liczb rzeczywistych dodatnich. Każdej parze (x, y), gdzie $x \in A$ i $y \in B$ odpowiada przekształcenie J_a^r. Teraz mówimy więc o funkcji dwu zmiennych. Wartościami tej funkcji są jednokładności,

dziedziną jest zbiór par (x, y), gdzie x jest punktem płaszczyzny, r zaś dodatnią liczbą rzeczywistą.

■ Wzór $f(x, y) = x + y$ określa funkcję, która każdej parze (x, y) liczb rzeczywistych przypisuje ich sumę. Jest np. $f(2, 13) = 15$, $f(\pi, -\frac{314}{100}) = \pi - 3,14$. Funkcja f jest funkcją dwu zmiennych. Wzór $g(x, y) = 2x^2 + xy + y - 1$ określa funkcję g dwu zmiennych. Znajdź $g(\sqrt{2}, \sqrt{8})$ i $g(-2, \pi)$. Parę (x, y), gdzie $x \in \mathbb{R}$ i $y \in \mathbb{R}$, utożsamiamy z punktem płaszczyzny kartezjańskiej. Iloczyn kartezjański $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ jest płaszczyzną kartezjańską. Funkcje f i g przypisują zatem każdemu punktowi płaszczyzny kartezjańskiej dokładnie jedną liczbę rzeczywistą.

■ Wzór $f(x, y, z) = 13x^2 + xy + 2z + z^3$ określa funkcję, która każdej trójce (x, y, z) liczb rzeczywistych przypisuje dokładnie jedną liczbę rzeczywistą. Ta funkcja f jest określona na zbiorze $\mathbb{R}^3$. Jest to funkcja trzech zmiennych: x, y i z.

14.2. Dane są dwie funkcje dwu zmiennych $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$ i $g(x) = 4 - \sqrt{1 - y^2}$. Określ dziedzinę każdej z nich. Znajdź $f(1, 1)$, $f(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $g(\pi, \frac{1}{2})$. Znajdź miejsca zerowe funkcji f i miejsca zerowe funkcji g.

Zauważ, że dla funkcji f i g z ostatniego zadania można rozstrzygać, czy są one ograniczone od dołu, czy są ograniczone od góry, bądź czy są ograniczone. Nie można natomiast rozstrzygać, czy te funkcje są monotoniczne (dlaczego?). Co ma do tego uwaga na s. 253?

Zmienne w funkcji wielu zmiennych oznacza się czasami innymi literami niż x i y.

■ Jeśli cząstka porusza się ruchem jednostajnym po prostej, to przebyta droga s jest funkcją dwu zmiennych: czasu s i prędkości v i wyraża się wzorem $s(v, t) = v \cdot t$.

14.2. Równania różniczkowe zwyczajne

Wyjdźmy od zadania.

14.3. W poniższych równaniach występuje funkcja i jej pochodna. Sprawdź, że:
— funkcja $f(x) = cx$, gdzie $c \in \mathbb{R}$ spełnia następujące równanie $x \cdot f'(x) - f(x) = 0$,
— funkcja $f(x)\sqrt{c^2 - 4x^2}$, gdzie $c \in \mathbb{R}$ spełnia równanie $f(x) \cdot f'(x) + 4x = 0$,
— funkcja $f(x) = e^{cx}$, gdzie $c \in \mathbb{R}$ spełnia równanie $f'(x) - cf(x) = 0$.

Definicja 14-3 [RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE] *Równaniem różniczkowym zwyczajnym* mazywamy równanie, w którym niewiadomą jest funkcja jednej zmiennej x i w którym występuje pochodna tej funkcji. Jest to więc równanie postaci $F(x, f(x), f'(x)) = 0$. Jeśli oznaczyć $y = f(x)$, to równanie przyjmuje postać

$$F(x, y, y') = 0,$$

gdzie F jest funkcją trzech zmiennych x, y i y'.

W równaniu różniczkowym zwyczajnym występuje tylko jedna zmienna niezależna, nieznana funkcja tej zmiennej oraz jej pochodna.

■ Równanie postaci $f'(x) + f(x) \operatorname{tg} x = \sin x$ jest równaniem różniczkowym zwyczajnym, które krótko zapisujemy w postaci $y' + y \operatorname{tg} x = \sin x$.

■ Równaniem różniczkowym zwyczajnym jest każde z poniższych równań:

$$y' + 2y = 0 \quad y' = y^2 + 1, \quad y' = 3x^2 - 4x + 1, \quad y' = \frac{2xy}{x^2+1}.$$

Definicja 14-4 [ROZWIĄZANIE RÓWNANIA RÓŻNICZKOWEGO ZWYCZAJNEGO] *Rozwiązaniem równania różniczkowego* $F(x, y, y') = 0$ albo *całką tego równania na przedziale* I, nazywamy każdą funkcję $y = y(x)$ różniczkowalną na przedziale I i spełniającą warunek

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0 \quad \text{dla każdego} \quad x \in I.$$

14.4. Sprawdź, że rozwiązaniem (całką) równania różniczkowego $y' + 2xy^2 = 0$ na przedziale $(-\infty, +\infty)$ jest funkcja $y(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

■ Rozwiązaniem równania różniczkowego $y' + 2y = 0$ jest każda funkcja $y(x) = ce^{-2x}$, gdzie c jest dowolną liczbą rzeczywistą. Te rozwiązania tworzące jednoparametrową rodzinę funkcji postaci $y(x) = ce^{-2x}$, nazywamy *całką ogólną* równania różniczkowego $y' + 2y = 0$. Czasami poszukuje się rozwiązania równania różniczkowego, które spełnia pewien warunek. Jeśli szukane rozwiązanie równania $y' + 2y = 0$ ma spełniać warunek $y(0) = 1$, to rozwiązaniem jest funkcja $y(x) = e^{-2x}$. Funkcję $y(x) = e^{-2x}$ nazywamy *całką szczególną* równania różniczkowego $y' + 2y = 0$.

Definicja 14-5 [ZAGADNIENIE POCZĄTKOWE] Niech $F(x, y, y') = 0$ będzie równaniem różniczkowym zwyczajnym. Układ warunków

$$F(x, y, y') = 0 \wedge y(x_0) = y_0$$

nazywamy *zagadnieniem początkowym* albo *zagadnieniem Cauchy'ego*.

14.5. Dane jest równanie różniczkowe $y' - e^{-y} = 0$. Sprawdź, że jego rozwiązaniem jest funkcja $y(x) = \ln(x + c)$. Znajdź rozwiązanie spełniające warunek $y(0) = 0$.

Definicja 14-6 [RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE W POSTACI JAWNEJ] Równanie różniczkowe postaci $y' = f(x)$ lub $y' = g(y)$, gdzie f i g są funkcjami ciągłymi, nazywamy *równaniem różniczkowym w postaci jawnej*.

Niech $y' = f(x)$, gdzie f jest funkcją ciągłą. Funkcja f jest zatem całkowalna. Całkując lewą i prawą stronę równania różniczkowego $y' = f(x)$ względem zmiennej x dostajemy równanie

$$y = \int f(x)dx = F(x) + c, \text{ gdzie } F \text{ jest funkcją pierwotną funkcji } f.$$

Funkcja $y = F(x) + c$ jest całką ogólną równania różniczkowego $y' = f(x)$.

■ Rozwiążemy równanie różniczkowe $y' = 3x^2 - 4x + 1$. Jest ono postaci $y' = f(x)$ (jest to postać jawna). Całkując to równanie stronami dostajemy równanie

$$y = \int (3x^2 - 4x + 1)dx, \quad \text{czyli} \quad y = x^3 - 2x^2 + x + c.$$

Otrzymane rozwiązanie $y = x^3 - 2x^2 + x + c$ jest całką ogólną równania różniczkowego $y' = 3x^2 - 4x + 1$.

Definicja 14-7 [RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE O ROZDZIELONYCH ZMIENNYCH] Równanie różniczkowe postaci $y' = f(x)g(y)$, gdzie f i g są funkcjami ciągłymi, nazywamy *równaniem różniczkowym o rozdzielonych zmiennych*.

Twierdzenie 14-1 *Jeżeli funkcje f i g w równaniu różniczkowym $y' = f(x)g(y)$ są ciągłe i $g(y) \neq 0$ dla każdego y, to całka tego równania jest spełnia warunek*

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x)dx + c.$$

■ Równanie różniczkowe $y' = \frac{2xy}{x^2+1}$ daje się zapisać w postaci $y' = \frac{2x}{x^2+1} \cdot y$, a więc jest równaniem różniczkowym o rozdzielonych zmiennych. Z twierdzenia 14-1 wynika, że jego rozwiązanie (całka) spełnia warunek

$$\int \tfrac{1}{y} dy = \int \tfrac{2x}{x^2+1} dx + c,$$

skąd wynika, że

$$\ln|y| = \ln|x^2+1| + c.$$

Wyznaczając z ostatniego równania y dostajemy, że $|y| = e^c(x^2+1)$, czyli

$$y = y(x) = \begin{cases} e^c(x^2+1), & \text{gdy } x \geqslant 0, \\ -e^c(x^2+1), & \text{gdy } y < 0. \end{cases}$$

14.6. Rozwiąż równania różniczkowe o rozdzielonych zmiennych:
a) $y' = y - 1$, b) $y' = \frac{1-x}{y+1}$ c) $y' = (2x-1)y$.

Definicja 14-8 [RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE JEDNORODNE] *Równaniem różniczkowym jednorodnym* nazywamy równanie postaci $y' = f(\frac{y}{x})$, gdzie $x \neq 0$ i f jest funkcją ciągłą.

■ Równaniem różniczkowym jednorodnym jest każde z następujących równań:

$$y'x = x + y, \quad xy' = 3y - 2x, \quad y' = \tfrac{y}{x} + \tfrac{x}{y}.$$

Równanie różniczkowe jednorodne $y' = f(\frac{y}{x})$ rozwiązujemy, sprowadzając je do równania o rozdzielonych zmiennych. W tym celu podstawiamy $\frac{y(x)}{x} = u(x)$ lub krótko $y = ux$, gdzie u jest nową poszukiwaną funkcją zmiennej x. Z faktu, że $y = ux$ wynika, że $y' = u + xu'$, a to oznacza, że równanie różniczkowe $y' = f(\frac{y}{x})$ przyjmuje postać

$$u + xu' = f(u), \quad \text{czyli postać} \quad u' = \tfrac{1}{x}[f(u) - u].$$

Z twierdzenia 14-1) wynika, że

$$\int \tfrac{1}{f(u)-u} du = \int \tfrac{1}{x} dx.$$

14.7. Rozwiąż równanie różniczkowe jednorodne $xy' = -2x + 3y$.

Definicja 14-9 [RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE LINIOWE] *Równaniem różniczkowym liniowym* nazywamy równanie postaci $y' + f(x)y = g(x)$, gdzie f i g są funkcjami ciągłymi.
Równanie $y' + f(x)y = 0$ nazywamy *równaniem różniczkowym liniowym jednorodnym.*

■ Rozwiążmy równanie różniczkowe liniowe jednorodne postaci $y' + y \operatorname{ctg} x = 0$. Jest to równanie $y' = -y \operatorname{ctg} x$, a więc równanie o rozdzielonych zmiennych. Z twierdzenia 14-1 dostajemy równanie

$$\int \tfrac{1}{y} dy = -\int \operatorname{ctg} x dx,$$

z którego wynika, że $\ln|y| = -\ln|\sin x| + \ln c_1$, a stąd

$y = c\frac{1}{\sin x}$ jest całką ogólną równania liniowego jednorodnego.

Rozwiązywanie równania różniczkowego liniowego $y' + f(x)y = g(x)$ rozpoczynamy od rozwiązania równania $y' + f(x)y = 0$ (tj. odpowiedniego równania liniowego jednorodnego). Jest to równanie o rozdzielonych zmiennych i z twierdzenia 14-1 dostajemy, że

$$\int \frac{1}{y} dy = -\int f(x)dx,$$

a zatem $\ln|y| = \ln|c| - F(x)$, gdzie F jest funkcją pierwotną funkcji f, stąd mamy

$$\ln\left|\frac{y}{c}\right| = -F(x), \text{ czyli } y = ce^{-F(x)} \text{ gdzie } c \in \mathbb{R} \text{ i } c \neq 0.$$

Zauważ, że rozwiązaniem równania $y' + f(x)y = 0$ jest także funkcja $y = 0$. Każda całka równania różniczkowego jednorodnego $y' + f(x)y = 0$ jest więc funkcją postaci $y = ce^{-F(x)}$, gdzie c jest dowolną liczbą rzeczywistą. Całka ogólna równania różniczkowego $y' + f(x)y = 0$ jest zatem określona wzorem $y = ce^{-F(x)}$, gdzie $c \in \mathbb{R}$.

14.8. Rozwiąż równania różniczkowe $y' + 2y = 0$.

Powróćmy do rozwiązywania równania różniczkowego $y' + f(x)y = g(x)$. Jeżeli $g(x) \neq 0$, to w całce $y = ce^{-F(x)}$, gdzie $F(x) = \int f(x)dx$, można stałą c zastąpić taką funkcją $c(x)$, aby iloczyn $c(x)e^{-F(x)}$ był całką równania $y' + f(x)y = g(x)$.

Funkcję $c(x)$ znajdziemy podstawiając do równania $y' + p(x)y = q(x)$ w miejsce y wyrażenie $c(x)e^{-F(x)}$ a w miejsce y' jego pochodną, czyli $[c(x)e^{-F(x)}]'$. Po tym podstawieniu i po wykonaniu odpowiednich przekształceń dostajemy:

$$c'(x) = g(x)e^{F(x)},$$

czyli

$$c(x) = \int g(x)e^{-F(x)}dx + c.$$

Podstawiając tak znalezioną funkcję $c(x)$ do równania $y = c(x)e^{-F(x)}$ dostajemy ogólne rozwiązanie równania $y' + f(x)y = g(x)$ w postaci

$$y = e^{-F(x)}[c + \int g(x)e^{F(x)}dx].$$

Metoda znajdowania całki równania różniczkowego liniowego nosi nazwę *uzmiennniania stałej*.

■ Rozwiążmy równanie różniczkowe liniowe $y' + y \operatorname{ctg} x = \sin x$. Z wcześniejszych rozważań wynika, że całką równania różniczkowego liniowego jednorodnego $y' + y \operatorname{ctg} x = 0$ jest $y = c\frac{1}{\sin x}$. Zamiast stałej c wprowadźmy funkcję $c(x)$ taką, aby funkcja $y = c(x)\frac{1}{\sin x}$ była całką równania $y' + y \operatorname{ctg} x = \sin x$. Mowa tu o *uzmiennianiu stałej*. Wstawiając tę funkcję do równania $y' + y \operatorname{ctg} x = \sin x$ dostajemy równanie

$$(c(x)\frac{1}{\sin x})' + c(x)\frac{1}{\sin x} \operatorname{ctg} x = \sin x,$$

z którego po przekształceniach dostajemy równanie

$$c'(x) = \sin^2 x,$$

a więc

$$c(x) = \int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c.$$

Całka ogólna równania różniczkowego $y' + y \operatorname{ctg} x = \sin x$ jest zatem funkcją

$$y = \frac{1}{4 \sin x}(2x - \sin 2x + 4c).$$

■ Równanie $y'(1 - x^2) + xy = 2x$ jest równaniem różniczkowym liniowym. Sprawdź, że jest tu $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ i $g(x) = \frac{2x}{1-x^2}$, a zatem

$$F(x) = \int f(x)dx = -\ln\sqrt{|1-x^2|} \quad \text{oraz} \quad \int g(x)e^{F(x)}dx = \frac{2}{\sqrt{|1-x^2|}},$$

czyli

$$y = \sqrt{|1-x^2|}\left(\frac{2}{\sqrt{|1-x^2|}} + c\right) = 2 + c\sqrt{|1-x^2|}.$$

14.9. Rozwiąż równanie różniczkowe liniowe $y' - \frac{1}{x}y = 2x^2$.

14.3. Przetrzenie probabilistyczne w przyrodzie – genotyp potomka jako wynik doświadczenia losowego

Zaskakujące prawidłowości na działkach doświadczalnych zainicjowały w XIX wieku odkrycie przez Grzegorza Mendla (1822–1884) praw dziedziczenia cech. Oparte na tych regularnościach hipotezy doprowadziły do odkrycia probabilistycznego modelu dziedziczenia cech. Nie bez znaczenia był tu fakt, że Mendel, oprócz przyrodniczego, miał także wykształcenie matematyczne. Był on bodaj pierwszym przyrodnikiem ujmującym statystycznie wyniki swych badań. Istotą dociekań G.Mendla było szukanie wyjaśnienia zadziwiających stosunków w rezultatach hodowli roślin. Do badań wybrał groch (*Pisum sativum*), który ma liczne odmiany o cechach stałych i różniących się wyraźnie od siebie (kolor kwiatu, długość pędu, kształt nasion itp.). Mendel badał, jak dziedziczy się każda z tych cech oddzielnie.

Przeprowadzając liczne krzyżówki między odmianami różniącymi się jedną parą cech, G. Mendel zauważył, że krzyżując rośliny, na przykład o czerwonych kwiatach z roślinami o kwiatach białych, wszystkie rośliny potomne (osobniki pokolenia F_1) mają czerwone kwiaty. Ten empiryczny fakt pozwolił mu postawić hipotezę, że czerwony kolor kwiatu jest cechą dominującą, a kolor biały – ustępującą (recesywną). Dane statystyczne pozwoliły mu sformułować odpowiedź na pytanie, co się stało z kolorem białym. W drugim pokoleniu (pokolenie F_2) pojawiły się znów rośliny o białych kwiatach i stosunek liczby osobników o czerwonych kwiatach do liczby osobników o kwiatach białych okazał się zadziwiająco bliski stosunkowi 3:1. Przeprowadzając obserwacje nad innymi parami cech u grochu, G. Mendel stwierdził, że zachowują się one zgodnie z powyższym schematem. Oto dane empiryczne z badań Mendla (około roku 1860)[30], *cd* oznacza dalej cechę dominującą, *cu* – cechę ustępującą (recesywną):

1. Wysokość pędu: na 1064 rośliny 787 miało długi pęd (*cd*), a 277 pęd krótki (*cu*);

2. Rozmieszczenie kwiatów: na 858 roślin 651 miało kwiaty rozmieszczone wśród łodyg (*cd*) i 207 zebrane w górnej części (*cu*);

3. Barwa młodego strąka: na 580 roślin było 428 o strąkach zielonych (*cd*) i 152 o strąkach żółtych (*cu*);

4. Kształt strąków: na 1181 roślin 882 miały strąki normalnie spłaszczone (*cd*) i 229 pozawężane między nasionami (*cu*);

5. Barwa kwiatów: spośród 929 roślin 705 miało kwiaty czerwone (*cd*), a 224 – kwiaty białe (*cu*);

6. Barwa nasion: spośród 8023 nasion 6022 były żółte (*cd*) i 2001 zielone (*cu*);

[30]Dane pochodzą z pracy: G.Mendel, *Versuche über Pflanzenhybriden*, Vieweg, Braunschweig 1970.

7. Kształt nasion: na 7324 nasiona 5474 były gładkie (*cd*) i 1850 nasion było pomarszczonych (*cu*).

Takie cechy w przyrodzie, jak kolor kwiatów u roślin, barwa sierści u gryzoni, długość skrzydeł u owadów, czy grupa krwi u ludzi, są wyznaczane i przekazywane z pokolenia na pokolenie przez *geny*. W każdej komórce organizmu znajdują się dwie nitki, zwane *chromosomami*. Geny są jakby koralikami nawleczonymi na te nitki. Konkretną cechę wyznaczają dwa geny, każdy jest umiejscowiony na innym chromosomie. Geny te występują w dwu postaciach, zwanych *allelami*. Dla prostoty opisu oznaczamy geny jednej pary alleli tą samą literą, dużą (A) i małą (a)[31]. Z uwagi na daną cechę, której nośnikiem są geny A i a, mamy trzy różne zestawy genów: AA, Aa, aa.

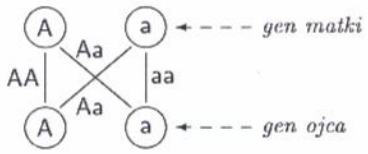
W każdej komórce organizmu znajduje się identyczny zestaw genów. Można zatem mówić o trzech typach osobników, a więc o trzech *genotypach*: AA,Aa i aa. Osobników o genotypach AA i aa nazywamy *homozygotami*, osobników o genotypie Aa nazywamy *heterozygotami*.

Komórki rozrodcze, zwane *gametami*, powstają przez podział komórki na dwie części. W trakcie tego podziału „nitka" (chromosom) z jednym genem trafia do jednej części, „nitka" z drugim — do drugiej. Gameta zawiera więc tylko jeden gen. Heterozygoty produkują zatem dwa rodzaje gamet: gamety z genem A i gamety z genem a. W czasie zapłodnienia następuje połączenie dwu gamet, matczynej i ojcowskiej. Połączone gamety tworzą *zygotę*. Zygota zawiera znów parę genów, z których jeden pochodzi od matki, drugi od ojca. O tym, która gameta matczyna połączy się z którą gametą ojcowską, decyduje przypadek. Mamy tu zatem do czynienia z pewnym doświadczeniem losowym.

W przypadku pewnej odmiany groszku gen A jest nośnikiem czerwonego koloru kwiatu, gen a — białego. Rośliny o genotypie Aa mają kwiaty różowe. Geny A i a współdziałają ze sobą. Grzegorz Mendel (1822–1884) hodując tę odmianę groszku zauważył zdumiewający fakt. Pewnego roku na jego działce wszystkie groszki były roślinami o różowych kwiatach. W roku następnym na tej działce pojawiły się rośliny o kwiatach różowych, czerwonych i białych. Roślin o kwiatach czerwonych było prawie tyle samo co białych, zaś roślin różowych — dwa razy więcej niż czerwonych.

14.10. Matka ma genotyp Aa. Taki sam genotyp ma ojciec. Jaki może być genotyp ich potomka? Dla każdego z możliwych genotypów znajdź prawdopodobieństwo, że potomek będzie miał taki genotyp. Genotypy Aa i aA są identyczne.

Model probabilistyczny dla kojarzenia dwu heterozygot przedstawia rys. 213. Odcinek przedstawia na nim zygotę, a więc genotyp potomka.



Rys. 213 Jednakowo możliwe przypadki w losowym kojarzeniu dwu heterozygot

[31] W genetyce dużą literą oznacza się gen dominujący, literą małą — gen ustępujący (recesywny).

Konstytuowanie się genotypu potomka rozpoczyna się od doboru rodziców do kojarzenia. W przypadku wielu cech i osobników pewnych gatunków, dobór rodziców jest losowy, gdy chodzi o ich genotypy. Mówimy w takim przypadku o *losowym kojarzeniu osobników*. Takie doświadczenie losowe (jego wynikiem jest genotyp potomka) nazywamy *panmiksją*. Przebiega ono etapami.

1° Najpierw dobierają się rodzice do kojarzenia. Populacja matek przypomina urnę U_M z krążkami trzech rodzajów: jedne są z obu stron czerwone (to matki o genotypie AA), jedne z obu stron białe (to matki o genotypie aa), pozostałe są z jednej strony białe, z jednej czerwone (to matki o genotypie Aa). Populacja ojców jest podobną urną U_O. Losowy dobór rodziców przypomina losowanie dwu krążków, jednego z urny U_M i drugiego z urny U_O.

2° Teraz każdy z rodziców przekazuje potomkowi jeden ze swoich genów. Przypomina to rzut krążkiem (jak monetą) wylosowanym z urny U_M. Kolor wyrzuconej strony krążka można interpretować jako gen, który matka przekazuje potomkowi. Analogicznie wylosujemy stronę krążka wylosowanego z urny U_O. Kolor wylosowanej strony krążka można interpretować jako gen, który potomkowi przekazuje ojciec. Po zlepieniu obu krążków stronami, na których leżą, dostajemu nowy krążek. Można go interpretować jako – ukształtowany w panmiksji – genotyp potomka.

14.4. Prawdopodobieństwo a pewne prawa przyrody – prawo Hardy'ego-Weinberga

Zbiór osobników jednego gatunku, zajmujących określony teren i mogących się krzyżować między sobą dowolnie, nazywa się *populacją mendlowską*. Geny wszystkich osobników tej populacji stanowią pewną pulę. Załóżmy, że mamy do czynienia z populacją osobników, w której występują genotypy AA, Aa i aa w stosunku $p^2 : 2pq : q^2$. Genetyk postawił sobie pytanie, czy i w jakim stosunku nastąpią z czasem (tj. w następnych pokoleniach) zmiany frakcji poszczególnych genotypów, jeśli osobniki wszystkich trzech genotypów są w jednakowym stopniu przystosowane do życia, jednakowo płodne i krzyżują się losowo (bez selekcji).

W roku 1908 angielski matematyk G. H. Hardy i niemiecki lekarz W. Weinberg odkryli, że w przypadku powyższego losowego kojarzenia osobników, frakcje występowania poszczególnych genów (a więc także frakcje poszczególnych genotypów) nie ulegają zmianie z pokolenia na pokolenie. To prawo równowagi genów i genotypów w kolejnych pokoleniach nosi nazwę *prawa Hardy'ego–Weinberga*[32]. Prawo to można uzasadnić na gruncie matematyki, prowadząc odpowiednie rachunki w modelu probabilistycznym panmiksji. Wspomniane prawo zauważył hodowca, ale jego ścisłe wyjaśnienie i uzasadnienie zawdzięczamy matematykowi. Próbka odegrała ważną rolę w naukowym odkryciu i w inspiracji matematycznego myślenia.

Oto propozycja organizacji tego matematycznego odkrycia.

14.11. Przygotuj dwa zestawy krążków: U_M i U_O. W każdym ma być 16 krążków z obu stron czerwonych, 8 krążków z jednej strony białych, z jednej czerwonych i jeden krążek z obu stron biały. Są to populacje rodziców. Wylosuj z każdego zestawu krążek i — nie oglądając go — szybko połóż na stole. Z tych krążków utwórz nowy, jak to opisano

[32] por. H. Krzanowska, A. Łomnicki, J. Rafiński, *Wprowadzenie do genetyki populacji*, PWN Warszawa 1982, s. 53.

wyżej (krążków nie trzeba zlepiać). Zapisz, jakiego typu krążek powstał. Zwróć krążki do zestawów i powtórz takie symulowanie panmiksji bardzo wiele razy[33]. Zauważ, że uzyskana „populacja potomków" jest bardzo podobna do „populacji rodziców" (potomków o genotypie aa jest bardzo mało, heterozygot Aa jest prawie 8 razy więcej, zaś osobników AA prawie 16 razy więcej niż aa). Czy potrafisz wyjaśnić zaskakujący fakt?

Powtarzając wiele razy konstytuowanie się genotypu potomka można stwierdzić, że częstości poszczególnych genotypów w populacji potomków są bardzo zbliżone do frakcji tych genotypów w populacji rodziców. Odkrywamy niejako to, co przed wiekiem odkrył na swoich poletkach Grzegorz Mendel. Zgodność wspomnianych częstości i frakcji jest treścią tzw. *prawa Hardy'ego-Weinberga*. Jest o nim mowa w poniższym zadaniu.

Symulując losowe kojarzenie osobników odkrywamy pewne prawo przyrody, które przed wiekiem zauważył hodowca, ale uzasadnił później (i to na gruncie rachunku prawdopodobieństwa!) matematyk.

14.12. Załóżmy, że dla losowania zarówno matki z populacji matek, jak i ojca z populacji ojców, jest: $p(\mathsf{AA}) = u^2, p(\mathsf{Aa}) = 2u(1-u)$ i $p(\mathsf{aa}) = (1-u)^2$, gdzie $0 < u < 1$.
a) Wykorzystując sposób symulowania panmiksji określ jej przestrzeń probabilistyczną.
b) Z losowym kojarzeniem osobników związmy zdarzenia:

$A = \{$*potomek losowo dobranych rodziców będzie miał genotyp* AA$\}$,
$B = \{$*potomek losowo dobranych rodziców będzie miał genotyp* Aa$\}$,
$C = \{$*potomek losowo dobranych rodziców będzie miał genotyp* aa$\}$.

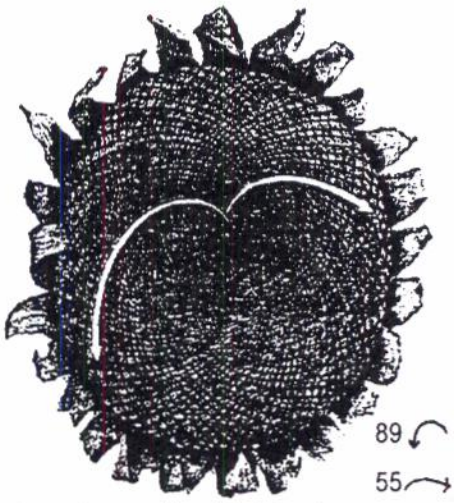
Wykaż, że $P(A) = u^2$, $P(B) = 2u(1-u)$ i $P(C) = (1-u)^2$.

[33]W grupie studenckiej, bądź w klasie można szybko zebrać wyniki kilkuset powtórzeń takiej symulacji panmiksji.

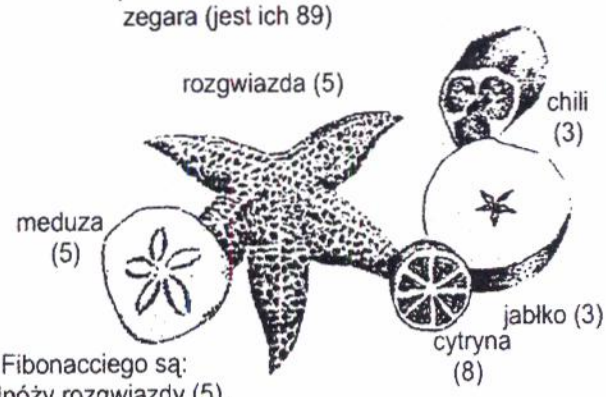
Liczby Fibonacciego w przyrodzie

łuski ananasa układają się w spirale, których liczby są liczbami Fibonacciego





nasiona słonecznika układają się w dwie rodziny spiral skręcających się :
- zgodnie z ruchem wskazówek zegara (jest ich 55)
- przeciwnie do ruchów wskazówek zegara (jest ich 89)



liczbami Fibonacciego są:
liczba odnóży rozgwiazdy (5),
liczba komór meduzy (5), jabłka (5), cytryny (8), papryki chili (3)

1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 ...

15. Odpowiedzi i wskazówki do zadań

Rozdział 1.

Zad. 1.15. a) Zdanie $\forall x \in \mathbb{R}: [x^2 < x]$ jest fałszywe, bo istnieje takie x_0, dla którego nie zachodzi nierówność $(x_0)^2 < x_0$. Jest tak dla $x_0 = 2$.
b) Zdanie $\forall x \in \mathbb{R}: [2^x + 3^x = 5^x]$ jest fałszywe, bo $2 \in \mathbb{R}$ i $2^2 + 3^2 = 13 \neq 25 = 5^2$.
c) Zdanie $\forall x \in \mathbb{R}: [\sqrt{x^2} = x]$ jest fałszywe, bo dla $x < 0$ jest $\sqrt{x^2} = |x| \neq x$.
d) Dla $x_0 = 1$ jest $(x_0 + 3)^2 \neq (x_0)^2 + 9$, a zatem zdanie $\forall x \in \mathbb{R}: [(x+3)^2 = x^2 + 9]$ jest fałszywe.

Zad. 1.19. e) Dla $n = 2$ mamy $1+2 = \frac{2(2+1)}{2}$. Załóżmy, że dla k zachodzi wzór $1+2+\cdot+k = \frac{k(k+1)}{2}$ i rozważmy sumę $1+2+\cdots+k+(k+1)$. Uwzględniając założenie indukcyjne mamy

$$1+2+\cdots+k+(k+1) = [1+2+\cdots+k]+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1}{2} = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k-1)(k+2)}{2},$$

a więc wzór zachodzi dla każdego $n = 2, 3, 4, \ldots$.

Rozdział 2.

Zad. 2.4. a) zdanie fałszywe, b) zdanie prawdziwe, c) zdanie prawdziwe, d) zdanie prawdziwe, e) zdanie prawdziwe, f) zdanie fałszywe.

Zad. 2.5. $|3,14 - \pi| = \pi - 3,14$, $|\frac{1}{n} - 1| = 1 - \frac{1}{n}$.

Zad. 2.6. $\{x \in \mathbb{R}: 1 < |x - \frac{1}{2}| < 2\} = (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$, $\{x \in \mathbb{R}: |x-2| > 3\} = (-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$.

Zad. 2.7. $A = (\pi - 1, \pi + 1)$, $B = (-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [\frac{5}{2}, +\infty)$.

Zad. 2.14. $A = \{-5, -2, 2, 5\}$, $B = \{-4, 2\}$, $C = \emptyset$, a zatem $A \cup B = \{-5, -4, -2, 2, 5\}$, $A \cap B = \{2\}$, $A \cup C = A = \{-5, -2, 2, 5\}$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cup C = B = \{-4, 2\}$ i $B \cap C = \emptyset$.

Zad. 2.16. $maxA = 1$, zbiór A nie posiada minimum, $\inf A = 0$ oraz $supA = 1$.

Zad. 2.24. Żaden z tych zbiorów punktów nie jest iloczynem kartezjańskim.

Rozdział 3.

Zad. 3.1. Zbiory przedstawiają relacje R_a, R_b, R_c i R_d, gdzie
$xR_ay \iff x = |y|$ dla $y \in \mathbb{R}$ (rysunek a),
$xR_by \iff x^2 + (y-1)^2 = 2$ dla $x, y \in \mathbb{R}$ (rysunek b),
$xR_cy \iff |x| + |y| = 2$ dla $x, y \in \mathbb{R}$ (rysunek c),
$xR_dy \iff y = x \vee y = -x$ dla $x, y \in \mathbb{R}$ (rysunek d).

Zad. 3.2. Relacja jest zbiorem par (x, y) spełniających funkcję zdaniową $|x-2| + |y+1| < 1$.

Rozdział 4.

Zad. 4.12. Dla każdego $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ jest $\binom{n}{k}(\frac{1}{5})^k(\frac{4}{5})^{n-k} > 0$. Wystarczy zatem wykazać, że $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(\frac{1}{5})^k(\frac{4}{5})^{n-k} = 1$. Ta suma jest rozwinięciem n-tej potęgi dwumianu $(\frac{1}{5} + \frac{4}{5})$, a więc jest równa 1.

Zad. 4.50. Nie jest to funkcja różnowartościowa, bo $f(-1) = f(-17) = \pi$.

Zad. 4.56. Różnowartościowe są funkcje f i g. Funkcja f jest rosnąca, funkcja g jest malejąca.

Zad. 4.62. Funkcja f nie jest rosnąca, bo dla $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$ jest $f(x_1) = 1$ oraz $f(x_2) = \frac{1}{2}$, a zatem zachodzi: $x_2 > x_1$ i $f(x_2) < f(x_1)$. Funkcja g jest rosnąca. Funkcja h nie jest malejąca.

Rozdział 5.

Zad. 5.14. a) pierwiastkiem układu jest para $(1,-2)$, b) układ jest sprzeczny, c) układ ma jeden pierwiastek $(7,5)$.

Zad. 5.16. Dla $n=1$.

Zad. 5.17. Dla $\alpha=-2$.

Zad. 5.18. $x_1=1, x_2=2, x_3=3$.

Zad. 5.26. Dla funkcji f: $0<m<2$, dla funkcji g: $m\leqslant -\frac{1}{2}$ lub $m\geqslant 3$.

Zad. 5.27. Jest tu $\Delta=16$, a zatem $3x^2-2x-1=3(x-\frac{1}{3})^2-\frac{4}{3}$.

Zad. 5.28. Dla $m=\frac{125}{76}$.

Zad. 5.29. Dla $\alpha<1$ lub $\alpha>3$.

Zad. 5.30. Odp. b) $\Delta=16-16=0$, $a=1>0$, miejsce zerowe: $x_0=-2$. Nierówność prawdziwa dla każdego $x\neq -2$.
c) $\Delta=1$, a więc są dwa miejsca zerowe: $x_1=3$ i $x_2=4$. Jest $a=1>0$, a więc parabola skierowana ramionami ku górze. Rozwiązaniem nierówności $x^2-7x+12>0$ jest zbiór $(-\infty,3)\cup(4,+\infty)$.
d) Rozwiązaniem nierówności $x^2+10x+3<0$ jest zbiór $(-3,-\frac{1}{3})$.
e) Nierówność $x^2-6x+20<0$ jest sprzeczna.

Zad. 5.33. $\alpha=0$ lub $\alpha=-3$.

Zad. 5.34. a) $x_1=-2, x_2=2$, b) $x_1=-\frac{1}{2}, x_2=\frac{1}{4}, x_3=\frac{1}{3}$, c) $x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Zad. 5.35. $D_f=\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$, $D_g=\mathbb{R}\setminus\{\frac{5-\sqrt{5}}{2},\frac{5+\sqrt{5}}{2}\}$, $D_h=\{x\in\mathbb{R}:(x\neq -1)\wedge(x\neq 1)\}$.

Zad. 5.37. a) $x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)\cup(2,+\infty)$. b) $\frac{-1-\sqrt{11}}{2}\leqslant x\leqslant\frac{-1+\sqrt{11}}{2}$ i $x\neq -1$ i $x\neq 1$.

Zad. 5.38. a) $x=16$, b) $x=3$, c) $x=2$.

Zad. 5.40. b) $x_1=-1, x_2=1$, c) $x_0=2$.

Zad. 5.41. a) $x>0$, b) $-2<x<3$.

Zad. 5.44. a) $x=2$, b) $x=\frac{9}{2}$, c) $x=3$.

Zad. 5.52. $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$, $\arccos(-\frac{1}{2})=\frac{2\pi}{3}$, $\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arcctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{6}$.

Zad. 5.51. Dla $a\in[-2,\frac{1}{4}]$.

Rozdział 6.

Zad. 6.3. Liczba 1234567890 należy do prawie wszystkich zbiorów ciągu (An). W tym ciągu (A_n) jest także nieskończenie wiele zbiorów, których moc jest liczbą nieparzystą, a zatem nie jest prawdą, że prawie wszystkie zbiory ciągu (A_n) mają moc parzystą.

Zad. 6.8. 2. $b_1=3\sqrt{3}$, $b_2=4\sqrt{2}$, $b_3=5\sin\frac{2\pi}{10}$, $b_4=6$,

3. $c_3=\frac{3\sqrt{3}}{4}$, $c_4=2$, $c_5=\frac{(2\sin\frac{2\pi}{10})\sqrt{5(5-2\sqrt{5})}}{4}$.

Zad. 6.14. a): $a_n=(\frac{4}{3})^{n-1}\cdot\frac{3}{2}=\frac{2^{2n-3}}{3^{n-2}}$.

Zad. 6.16. $d_n=\frac{n(n-1)}{2n^2}=\frac{n+1}{2n}$.

Zad. 6.19. Oba ciągi (t_n) i (q_n) są ciągami geometrycznymi o pierwszym wyrazie równym $\frac{1}{2}$ i ilorazie $q=\frac{1}{4}$ (pole każdego następnego trójkąta jest czwartą częścią pola trójkąta poprzedniego w tym ciągu). Są to zatem ciągi równe.

Zad. 6.57. $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\pi$.

Zad. 6.59. Jest: $p_1=\frac{1}{2}$, $p_2=\frac{1}{8}$, $p_3=\frac{1}{32}$, $p_n=(\frac{1}{2})^{2n-1}$ dla $n=1,2,3,\ldots$, $t_1=\frac{1}{2}, t_2=\frac{1}{8}, t_3=\frac{1}{32}, t_n=(\frac{1}{2})^{2n-1}$ dla $n=1,2,3,\ldots$, $f_1=1, f_2=\frac{1}{2}, f_3=\frac{1}{4}, f_4=\frac{1}{8}$, $f_n=(\frac{1}{2})^{n-1}$, $k_1=\frac{1}{4}, f_2=\frac{1}{16}, f_3=\frac{1}{64}, k_n=(\frac{1}{4})^n$ dla $n=1,2,3,\ldots$.

Zad. 6.62. b) Niech $a_n = 3^n$ i $b_n = 3^n + 3n$. Jest $a_n \leqslant b_b$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(3^n) = +\infty$. Z twierdzenia o dwu ciągach wynika, że $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(3^n + 3n) = +\infty$.

Zad. 6.69. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$.

Zad. 6.74. Wystarczy skorzystać z nierówności $\frac{3n-1}{5n+1} \leqslant \frac{3n+(-1)^n}{5n+1} \leqslant \frac{3n+1}{5n+1}$. Granicą jest $\frac{3}{5}$.

Rozdział 7.

Zad. 7.18. Jest $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n} = \frac{3}{2}$.

Zad. 7.21. $x = \frac{2}{3}$.

Zad. 7.22. $a_n = (\frac{1}{3})^{n-1}$ dla $n \in \mathbb{N}_1$.

Zad. 7.23. Dla $a \in (0,1) \cup (2,3)$.

Zad. 7.24 Dla każdego $n \in \mathbb{N}_1$ jest $b_n = \frac{a_n}{10^n} \leqslant \frac{9}{10^n}$ i szereg $\sum \frac{9}{10^n}$ jest zbieżny i ma sumę 1 (jest to bowiem szereg geometryczny).

Rozdział 8.

Zad. 8.31. Żadne trzy spośród dziewięciu punktów wyróżnionych na okręgu nie leżą na jednej prostej (nie są współliniowe), a więc wyznaczają trójkąt. Trójkątów jest zatem tyle, ile jest trzyelemenetowych kombinacji zbioru dziewięcioelementowego, a wiec $\binom{9}{3}$.

Zad. 8.49. Liczba naturalna dzieli się przez 4 jeśli dwie ostatnie jej cyfry tworzą liczbę podzielną przez 4. Dwie ostatnie cyfry liczb, o które w zadaniu chodzi, muszą tworzyć któraś z pięciu liczb: 12, 24, 32, 44, 52. Pierwsze trzy cyfry mogą być dowolne. Pytanie: ile jest takich liczb? zastąpmy pytaniem: na ile sposobów można taką liczbę utworzyć?. Pierwsze trzy cyfry można utworzyć na 5^3 sposobów, dwie ostatnie zaś na 5 sposobów. Łącznie tych sposobów mamy więc $5^3 \cdot 5$, czyli 5^4, tj. 625.

Zad. 8.50. W j. polskim mamy 32 litery, ale np. litery ą, ę, ń nie są częścią inicjału. Każdy inicjał jest więc dwuwyrazową wariacją zbioru co najwyżej 30-elementowego. Wszystkich, różnych między sobą, inicjałów jest nie więcej niż 30^2, tj. nie więcej niż 900. We wspomnianej miejscowości muszą się zatem inicjały obywateli powtarzać.

Zad. 8.51. Siatka sześcianu jest utworzona z sześciu kwadratów. W piątej siatce na rys. 120 te kwadraty są rozmieszczone w trzech wierszach. W pierwszym i trzecim jest jeden kwadrat, w drugim są cztery. Siatki możemy klasyfikować pod kątem ilości kwadratów w tych trzech wierszach. Jedną klasę tworzą te siatki, w których w jednym wierszu są cztery kwadraty. Takich siatek jest 6. Drugą klasę tworzą siatki, w których wiersz tworzą trzy kwadraty. Takie siatki są cztery. Została jeszcze siatka, która w każdym wierszu ma dwa kwadraty. Jest więc 11 siatek sześcianu (zob. rysunek 120).

Zad. 8.52. Są dwa znaki pojednyncze. Każdy ciąg co najmniej dwu znaków jest wariacją zbioru $\{\bullet, -\}$. Takich wariacji dwuwyrazowych mamy 2^2, trzywyrazowych jest 2^3, czterowyrazowych 2^4 itd. Gdyby przyjąć, że maksymalna długość kodu jest równa 4, to mamy $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4$, tj. $2 + 4 + 8 + 16$, czyli 30. W alfabecie polskim mamy 32 litery. Ponadto trzeba także zakodować 10 cyfr i znaki przestankowe. Kodów co najwyżej czterowyrazowych jest zatem za mało. W przypadku kodów co najwyżej pięciowyrazowych mamy ich $30 + 2^5$, czyli 62. Ograniczenie długości kodów w alfabecie Morse'a do pięciu znaków wystarcza do tego, by utworzyć kody wszystkich znaków potrzebnych do przekazywania informacji.

Zad. 8.58 Zauważ, że $1\ \mathrm{m}^3 = (1\ 000)^3\ \mathrm{mm}^3$. Chodnik ma zatem długość 1 000 000 000 mm^3, czyli 1 000 km. Czas potrzebny na przebycie tej drogi z prędkością 50 km/godz jest ilorazem $\frac{1\ 000\ \mathrm{km}}{50\ \mathrm{km/godz}}$, czyli wynosi 20 godz.

Zad. 8.59. Każde rozmieszczenie dwunastu osób na dwunastu miejscach przy prostokątnym stole jest permutacją zbioru dwunastoelementowego. Takich permutacji jest 12!, czyli 479 001 600. Trzecia część tej liczby, czyli 159 667 200 jest (liczonym w dniach) czasem czekania na realizację wszystkich rozmieszczeń. Jest to 437 444 lat.

Zad. 8.61. Koszt hufnali do drugiej podkowy jest sumą: 128+256+512+1 024+2 048+4 096, tj. kwotą 6 064 dukaty. Koszt hufnali do trzeciej podkowy jest sumą:

$$8\,192 + 16\,384 + 32\,768 + 65\,536 + 131\,072 + 262\,144,$$

a więc kwotą 516 096 dukatów. Koszt hufnali do czwartej podkowy jest sumą:

$$524\,288 + 1\,048\,576 + 2\,097\,152 + 4\,194\,304 + 8\,388\,608 + 16\,777\,216,$$

tj. kwotą 33 030 1444 dukaty. Ta suma (a wynosi ona aż 33 552 420 dukatów) okazała się dla magnata niewyobrażalnie wielka.

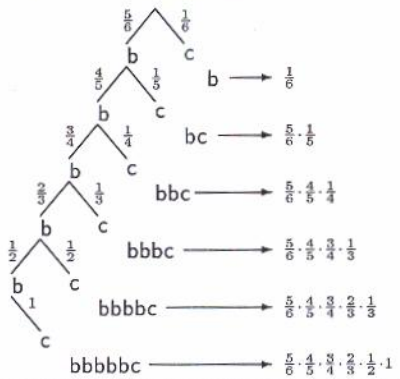
Rozdział 9.

Zad. 9.1. Z faktu, że $0 < u < 1$ wynika, że $p_n(k) > 0$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Z twierdzenia 8-4 (zwanego wzorem dwumianowym Newtona, por. s. 146) wynika, że

$$p_n(0) + p_n(1) + p_n(2) + \cdots + p_n(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k (1-u)^{n-k} = [u + (1-u)]^n = 1^n = 1,$$

a zatem funkcja p_n jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

Zad. 9.17. Rozwiązanie zadania a prezentuje rysunek 214.



Rys. 214 Drzewo i przestrzeń probabilistyczna dla czekania na czarną kulę przy losowaniu bez zwracania kuli z urny U_{5*1}

Zad. 9.36. Jest $P(A_0) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(A_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(A_2) = 0$ i $P(A_3) = \frac{1}{6}$.

Zad. 9.47. Wynik 10-krotnego rzutu monetą jest 10-wyrazową wariacją zbioru $\{o, r\}$. Wszystkich wyników jest 2^{10} i wszystkie są jednakowo prawdopodobne, a więc prawdopodobieństwo każdego jest równe $\frac{1}{2^{10}}$. Zauważ, że $(\frac{1}{2})^{10} \approx 0,0\,009\,765$. $P(A_9) = \frac{11}{2^{10}}$.

Zad. 9.80. Z rysunku 154 wynika, że funkcja p_X jest określona następująco:

$k \in \Omega_X$:	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=k)$:	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Zad. 9.91. 360 zł.

Zad. 9.92. 1 zł 50 gr.

Zad. 9.93. $100 \cdot 50$ gr.

Zad. 9.98. Z rozwiązania zadania 9.83 wynika, że zmienne losowe $X + Y$ oraz $X \cdot Y$ mają rozkłady jednopunktowe i $X + Y = 1$ oraz $X \cdot Y = 0$. Środkiem ciężkości układu mas jest

wówczas ta jedyna wartość zmiennej losowej. Mamy więc $E(X+Y)=1$ i $E(X\cdot Y)=0$. Jest $E(X\cdot Y)=0\neq(\frac{1}{2})\cdot(\frac{1}{2})=E(X)\cdot E(Y)$.

Rozdział 10.

Zad. 10.15. a) Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem zbieżnym do zera od strony prawej. Oznacza to, że $x_n>0$, a zatem odpowiedni ciąg wartości funkcji $f(x)=\frac{x}{|x|}$ jest określony wzorem $f(x_n)=\frac{x_n}{x_n}=1$. Ten ciąg ma granicę równą 1, bo jest to ciąg stały ($f(x_n)=1$ dla każdego $n\in\mathbb{N}_1$.

d) Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem zbieżnym do 2 od strony lewej. Oznacza to, że $x_n<2$ dla każdego $n\in\mathbb{N}_1$, a zatem $2-x_n>0$ dla $n=1,2,3,\ldots$. Odpowiedni ciąg wartości funkcji $f(x)=\frac{8-x^3}{|2-x|}$ jest określony wzorem $f(x_n)=\frac{8-(x_n)^3}{2-x_n}$. Ze wzoru na $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ wynika, że $f(x_n)=\frac{(2-x_n)[4+2x_n+(x_n)^2]}{2-x_n)}=4+2x_n+(x_n)^2$. Z twierdzeń o granicy sumy oraz iloczynu ciągów zbieżnych w sensie węższym wynika, że

$$\lim_{n\to\infty}[4+2x_n+(x_n)^2]=4+2\cdot\lim_{n\to\infty}x_n+(\lim_{n\to\infty}x_n)\cdot(\lim_{n\to\infty}x_n)=4+2\cdot2+2\cdot2=12,$$

co należało wykazać.

Zad. 10.16. $\lim\limits_{x\to0-}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}f(x)=1$, czyli $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$.

$\lim\limits_{x\to0-}g(x)=-\infty$ oraz $\lim\limits_{x\to0-}g(x)=+\infty$, a zatem funkcja g nie posiada granicy w punkcie $x_0=1$; $\lim\limits_{x\to0-}h(x)=1$ i $\lim\limits_{x\to0+}h(x)=1$, czyli $\lim\limits_{x\to0}h(x)=1$.

Zad. 10.18. b) $x_n^1=1-\frac{1}{n}$ oraz $x_n^2=1+\frac{1}{n}$. Oba ciągi (x_n^1) i (x_n^2) zdążają do 1 i ich wyrazy są różne od 1. Mamy tu:

$f(x_n^1)=\frac{7}{(1-\frac{1}{n})^2-1}=\frac{7}{1-2\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}-1}=\frac{7}{-2\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{7n}{-2+\frac{1}{n}}\to-\infty.$

$f(x_n^2)=\frac{7}{(1+\frac{1}{n})^2-1}=\frac{7}{1+2\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}-1}=\frac{7}{2\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{7n}{+2+\frac{1}{n}}\to+\infty.$

Granica funkcji f w punkcie $x_0=1$ nie istnieje.

Zda. 10.20. Wyróżnikiem trójmianu kwadratowego jest $\Delta=4(1+8a)$. Z założenia jest $a>0$, a zatem istnieją dwa pierwiastki równania $ax^2-2x-8=0$. Są nimi:

$$x_1(a)=\frac{1-\sqrt{1+8a}}{a}\quad\text{oraz}\quad x_2(a)=\frac{1+\sqrt{1+8a}}{a}.$$

Jest np. $\lim\limits_{a\to0+}x_1(a)=\lim\limits_{a\to0+}\dfrac{1-\sqrt{1+8a}}{a}=\lim\limits_{a\to0+}\dfrac{(1-\sqrt{1+8a})(1+\sqrt{1+8a})}{a(1+\sqrt{1+8a})}=$

$\lim\limits_{a\to0+}\dfrac{1-(1+8a)}{a(1+\sqrt{1+8a})}=\lim\limits_{a\to0+}\dfrac{-8}{1+\sqrt{1+8a}}=\dfrac{-8}{2}=-4$, bo $\lim\limits_{a\to0+}\sqrt{1+8a}=1$.

Zad. 10.30. Funkcja $g(x)=x\sin x$ jest iloczynem funkcji $g_1(x)=x$ oraz $g_2(x)=\sin x$. Każda z nich ma w punkcie $x_0=0$ granicę równą 0, a zatem z twierdzenia 10-1 (zob. s. 198) jest $\lim\limits_{x\to0}x\sin x=\lim\limits_{x\to0}x\cdot\lim\limits_{x\to0}\sin x=0\cdot0=0$.

Zad. 10.35. Asymptoty funkcji f: pionowa: $x=2$, ukośna: $y=x$.

Zad. 10.36. Asyptoty funkcji f: pionowe: $x=-1$ i $x=-2$, pionowa: $y=1$.

Zad. 10.42. Dla $c=2$.

Zad. 10.46. Funkcja f jest w każdym punkcie prawostronnie ciągła, ale nie jest lewostronnie ciągła w punktach $x_0\in\mathbb{Z}$. Funkcja *entier* (cecha) nie jest zatem ciągła.

Zad. 10.47. Funkcja g jest w każdym punkcie prawostronnie ciągła, ale nie jest lewostronnie ciągła w punktach $x_0\in\mathbb{Z}$. Funkcja g (mantysa) nie jest funkcją ciągłą.

Zad. 10.48. Jest $h(x)=[x]+(x-[x])=x$ dla $x\in\mathbb{R}$. Funkcja h jest określona wzorem $h(x)=x$. Jest to funkcja liniowa, a więc jest to funkcja elementarna. Funkcja h jest funkcją ciągłą.

Zad. 10.55. Dla $b=1$ i $c=1$.

Zad. 10.60. Zauważ, że $f(\sqrt{2}) = 0$, a zatem pierwiastkiem, którego przybliżenia znajdujemy tu za pomocą twierdzenia Darboux, jest liczba $x_0 = \sqrt{2}$.

Zad. 10.61. Jest $f(1) = 0+1-2 = -1 < 0$ i $f(2) = \ln 2+2-2 = \ln 2 > 0$. Funkcja f jest ciągła na przedziale $(0, +\infty)$, a zatem z twierdzenia Darboux wynika, że $\exists x_0 \in (1,2) : [f(x_0) = 0]$.

Zad. 10.69. Funkcja f nie jest ciągła w punkcie $x_1 = -1$ (nieciągłość II rodzaju) i w punkcie $x_2 = 1$ (skok).

Rozdział 11.

Zad. 11.2. Dla funkcji $f(x) = \sin x$ i punktu x_0 mamy

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 =$$
$$2\cos\tfrac{x_0+\Delta x+x_0}{2}\sin\tfrac{x_0+\Delta x-x_0}{2} = 2\cos(x_0 + \tfrac{1}{2}\Delta x)\sin\tfrac{1}{2}\Delta x.$$

Iloraz różnicowy jest zatem funkcją zmiennej Δx postaci:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{2\cos(x_0 + \frac{1}{2}\Delta x)\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\Delta x} = \cos(x_0 + \frac{1}{2}\Delta x)\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x},$$

a stąd wynika, że

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\cos(x_0 + \frac{1}{2}\Delta x)\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\cos(x_0 + \frac{1}{2}\Delta x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}.$$

Ale $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} = 1$ oraz $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos(x_0 + \dfrac{1}{2}\Delta x) = \cos x_0$ (bo funkcja $g(x) = \cos x$ jest ciągła), a zatem $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \cos x_0 \cdot 1 = \cos x_0$, co należało wykazać.

Zad. 11.4. a) funkcja nie jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 2$, bo

$$\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta f}{\Delta x} = 1 \text{ i } \lim_{\Delta x\to 0-}\frac{\Delta f}{\Delta x} = -1,$$

gdzie $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ jest ilorazem różnicowym funkcji f w punkcie $x_0 = 2$;

Zad. 11.5. Dla $a = 2$.

Zad. 11.8. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{7}{2}$.

Zad. 11.9. Jest $s'(0) = 3$, $s'(1) = 0$ i $s'(2) = -9$.

Zad. 11.22. Dla $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{5}{3}$ i $c = 2$.

Zad. 11.34. Maksymalne pole prostokąta jest równe $\frac{a\cdot h}{4}$.

Zad. 11.35. $a = b = 2\sqrt{3}$.

Zad. 11.36. Na przedziałach $(-\infty, -2)$ oraz $(0, 2)$ funkcja g jest rosnąca, na przedziałach $(-2, 0)$ oraz $(2, +\infty)$ funkcja g jest malejąca. W punktach $x_1 = -2$ i $x_2 = 2$ funkcja g posiada maksimum lokalne, w punkcie $x_3 = 0$ znajduje się jej mninimum lokalne.

Zad. 11.43. Jeśli promień $r = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}}dcm^3$, to powierzchnia S blachy zużytej na wykonanie tego walca jest najmniejsza i wynosi $S_{min} = 3\sqrt[3]{2\pi}$.

Zad. 11.45. $\frac{1}{2}$.

Zad. 11.49. Funkcja G jest wypukła na przedziale $(e^{-\frac{3}{2}}, +\infty)$, jest natomiast wklęsła na przedziale $(0, e^{-\frac{3}{2}})$. Wykres funkcji g ma zatem punkt przegięcia. Jest nim punkt o współrzędnych $(e^{-\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2}e^{-3})$.

Rozdział 12.

Zad. 12.2.

c) Jest $\int\frac{x+2}{x+3}dx = \int\frac{x+3-1}{x+3}dx = \int(1 - \frac{1}{x+3}dx = \int dx - \int\frac{1}{x+3}dx = x - \ln|x+3| + c$.

d) $\int\frac{x^2-x+1}{\sqrt{x}}dx = \int(\frac{x^2}{\sqrt{x}} - \frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}})dx = \int\frac{x^2}{\sqrt{x}}dx - \int\frac{x}{\sqrt{x}} + \int\frac{1}{\sqrt{x}}dx =$

$\int x^{\frac{3}{2}}dx - \int x^{\frac{1}{2}}dx + \int x^{-\frac{1}{2}}dx = (\frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1} + c + 1) - (\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + c_2) + (\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1} + c_3) =$

$\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{5}(\sqrt{x})^5 - \frac{2}{3}(\sqrt{x})^3 + 2\sqrt{x} + c.$

Zad. 12.3 a) $\int \frac{x^4-1}{x+1}dx = \int \frac{(x^2)^2-1}{x+1}dx = \int \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x+1}dx = \int \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x+1}dx = \ldots =$
$\frac{1}{12}(3x^4 + 6x^2 - 4x^3 - 12x) + c.$
b) $\int \frac{1}{x^5}dx = -\frac{1}{4x^4} + c.$
c) $\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + c,$
d) $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} = \ln|x| + 2arc\operatorname{tg} x + c.$

Zad. 12.4. a) $\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c = -e^{-x}(x+1) + c.,$
c) $\int x \cdot \ln x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + c.$
d) $\int x^3 e^x dx = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + c.$
e) $\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{9}x^3(3\ln x - 1) + c.$

Zad. 12.5. a) Podstawiając $2x + 3 = t$ mamy: $2dx = dt$, czyli $dx = \frac{1}{2}dt$, czyli
$\int \cos(2x+3)dx = \frac{1}{2}\int \cos t dt = \frac{1}{2}\sin t + c = \frac{1}{2}\sin(2x+3) + c.$
b) Niech $1 + 2\cos x = 1.$
Po zróżniczkowaniu stronami mamy $-2\sin x dx = dt$, czyli $\sin x dx = -\frac{1}{2}dt$. Mamy więc

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+2\cos x}}dx = \int \frac{-\frac{1}{2}dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = -\frac{1}{2}\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = -t^{\frac{1}{2}} + c = -\sqrt{1+2\cos x} + c.$$

Zad. 12.7. Pole jest równe $\int_0^1 [e^x - e^{-x}]dx = e + e^{-1} - 2.$

Zad. 12.10. Pole obszaru jest równe 6.

Zad. 12.11. $\frac{\pi}{2} + 2.$

Zad. 12.14. Pole jest równe $\frac{125}{6}$.

Zad. 12.16. a) 0; b) $\frac{2}{\pi}$; c) $\frac{1}{3}$.

Zad. 12.21. 36π.

Rozdział 13.

Zad. 13.10. $2x + 3xi + 4y - 5yi = (2x+4y) + (3x-5y)i$, a więc $(2+3i)x + (4-5i)y = 6 - 2i$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(2x+4y) + (3x-5y)i = 6 - 2i$. Dwie liczby zespolone są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są równe ich części rzeczywiste i części urojone, a więc poszukiwane x i y muszą spełniać układ równań: $2x + 4y = 6$ i $3x - 5y = -2$. Rozwiazaniem tego układu jest $x = 1$ i $y = 1$.

Zad. 13.11a) Niech szukane z będzie liczbą zespoloną $x + yi$. Nietrudno sprawdzić, że $(x + yi)^2 = i$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczby rzeczywiste x i y spełniają układ równań: $x^2 - y^2 = 0$ oraz $2xy = 1$, a więc gdy $x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x = y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Zad. 13.11d) $z = \frac{1}{6} - \frac{25}{6}i.$

Zad. 13.13. $|z_3| = |\frac{4+1}{3+2i}| = \sqrt{\frac{17}{13}},$

Zad. 13.15. $arg\ z_1 = \frac{3}{4}\pi,\ arg\ z_2 = \frac{\pi}{2},\ arg\ z_3 = -\frac{3}{4}\pi,\ arg\ z_4 = -\frac{\pi}{3}.$

Zad. 13.17. Jest $z_1 = 1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}),\quad z_2 = \sqrt{2}[\cos(-\frac{3}{4}\pi) + i\sin(-\frac{3}{4}\pi)],$
$z_4 = 2[\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})],\quad z_5 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}).$

Zad. 13.18. a) $2\sqrt{2}[\cos(-\frac{\pi}{12}) + i\sin(-\frac{\pi}{12})]$, b) $4(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$, c) $\frac{\sqrt{2}}{2}[\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}).$

Zad. 13.19. a) $(1+i)^{10} = [\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})]^{10} = 2^5(\cos\frac{10\pi}{4} + i\sin\frac{10\pi}{4}) =$
$32[\cos(2\pi + \frac{\pi}{2}) + i\sin(2\pi + \frac{\pi}{2})] = 32(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 32(0+i) = 32i,$
c) $(\sqrt{3} - i)^{60} = 2^{60},$
d) $(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)^{-3} = [\cos(-\frac{2\pi}{3}) + i\sin(-\frac{2\pi}{3})]^{-3} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1.$

Zad. 13.20. Niech $z = -4 = -4 + 0i$. Jest $|z| = 4$ oraz argument $\varphi = \pi$. Mamy więc dwa pierwiastki drugiego stopnia z liczby zespolonej $z = -4 + 0i$. Są nimi liczby zespolone: $u_0 = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 2i$ oraz $u_1 = 2(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = -2i$.

Zad. 13.21. Jest tu $\sqrt{\Delta} = \sqrt{-36} = 6i$ mamy: $x_1 = 2 - 3i$ oraz $x_2 = 2 + 3i$.

Zad. 13.22. a) $x_1 = 2i$, $x_2 = -2i$, b) $x_1 = 1 - i$, $x_2 = -1 + i$, c) $x_1 = 1 + i$, $x_2 = 1 + 2i$.

Zad. 13.23. $x_1 = 2 + i$ oraz $x_2 = 3 - i$.

Rozdział 14.

Zad. 14.6. a) $y(x) = ce^x$, b) Całka równania jest funkcją $y(x)$ spełniającą warunek $(y+1)^2 + (1-x)^2 = c$, c) Dla $y \neq 0$ mamy $\frac{1}{y}dy = (2x - 1)dx$. Całkując obie strony otrzymujemy $\ln|y| = x^2 - x - c$, skąd $y = ce^{x^2-x}$. Całką ogólną równania $y' = (2x - 1)y$ jest rodzina funkcji $y = ce^{x^2-x}$, gdzie c jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Zad. 14.10. Dzieląc równanie $xy' = -2x + 3y$ przez x $(x \neq 0)$ dostajemy równanie $y' = -2 + 3\frac{y}{x}$. Niech $u = \frac{y}{x}$. Jest wówczas $y = ux$ i $y' = u'x + u$, a zatem podstawiając dostajemy równanie $u'x + u = -2 + 3u$, czyli równanie o rozdzielonych zmiennych $u' = \frac{1}{x}(2u - 2)$. Z tw. 14-1 wynika, że $\int \frac{1}{u-1}du = 2\int \frac{1}{x}dx$, skąd $\ln|u-1| = 2\ln|x| + c$. Istnieje dodatnia liczba rzeczywista c_1, że $c = \ln c_1$. Po przekształceniach dostajemy, że $u = c_2x^2 + 1$, gdzie $c_2 = c_1$, jeśli $u \geqslant 1$ oraz $c_2 = -c_1$, jeśli $u < 1$. Wstawiając do równania $u = c_2x^2 + 1$ iloraz $\frac{y}{x}$ w miejsce u otrzymamy, że $\frac{y}{x} = c_2x^2 + 1$, skąd wynika, że $y = c_2x^3 + x$. Całka ogólna równania $xy' = -2x + 3y$ jest postaci $y = y(x) = c_2x^3 + x$.

Zad. 14.8. a) $y(x) = ce^{-2x}$, b) $y(x) = c\cos t$.

Zad. 14.9. Jest tu $f(x) = -\frac{1}{x}$ i $g(x) = 2x^2$. Rozwiązaniem równania liniowego jednorodnego $y' - \frac{1}{x}y = 0$ jest całka $y = cx$. Uzmieniając stałą c dostajemy całkę ogólną $y = x^3 + cx$.

Literatura

[1] R. Antoniewicz, A. Misztal, *Matematyka dla studentów ekonomii. Wykłady i ćwiczenia*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1997.

[2] A. Chronowski, *Zadania z elementów teorii mnogości i logiki matematycznej*, Wydawnictwo „Dla szkoły", Wilkowice 1999.

[3] A. Chronowski, H. Kąkol, Z. Powązka, *Granica i ciągłość funkcji*, Wydawnictwo „Dla szkoły", Wilkowice 1998.

[4] J.Ćihlař, *Kurs stochastyki dla nauczycieli*, Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis, Studia ad Calculum Probabilitatis Eiusque Didacticam Pertinentia II, Kraków 2008.

[5] M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 1*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2002.

[6] R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik, *Matematyka konkretna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1996.

[7] R. Grzymkowski, *Matematyka dla studentów wyższych uczelni technicznych*, Wydawnictwo Pracowni Komputerowej J. Skalbmierskiego, Gliwice 2000.

[8] T. Iwiński, *Szeregi nieskończone*, WSiP, Warszawa 1974.

[9] H. Kąkol, Z. Powązka, *Pojęcie funkcji – część 1*, Wydawnictwo „Dla szkoły", Bielsko-Biała 1995.

[10] H. Kąkol, Z. Powązka, *Pojęcie funkcji – część 2*, Wydawnictwo „Dla szkoły", Bielsko-Biała 1994.

[11] St. Kowal, *Przez rozrywkę do wiedzy – rozmaitości matematyczne*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1973.

[12] I. Krech, *Rachunek prawdopodobieństwa a sumowanie szeregów*, Matematyka 1 (2000), s. 19-24.

[13] I. Krech, A. Płocki, P. Tlustý, *Stochastic tools for calculating sums of certain numerical series*, Proceedings of International Congress IMEN 2009, Ružomberok 2009.

[14] W. Krysicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach część I*, PWN, Warszawa 1974.

[15] F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa 1969.

[16] W. Marek, J. Onyszkiewicz, *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach*, PWN, Warszawa 1972.

[17] Z. Moszner, *O teorii relacji*, PZWS, Warszawa 1967.

[18] V. Omasta, *Pasjanse, stare i nowe gry*, Wydawnictwo Interpress, Warszawa 1987.

[19] A. Płocki, *Prawdopodobieństwo wokół nas. Rachunek prawdopodobieństwa w zadaniach i problemach*, Wydawnictwo „Dla szkoły", Wilkowice 2004.

[20] A. Płocki, *Stochastyka dla nauczyciela*, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock 2007.

[21] H. Rasiowa, *Wstęp do matematyki współczesnej*, PWN, Warszawa 1968.

[22] K. Ross, Ch. Wright, *Matematyka dyskretna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1996.

[23] T. Trajdos, *Matematyka dla inżynierów 1*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1987.

[24] T. Trajdos, *Matematyka dla inżynierów 2*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1987.

[25] N.J. Wilenkin, *Kombinatoryka*, PWN, Warszawa 1972.

[26] N.N. Worob'jew, *Čisla Fibonačči*, Izdatělstvo NAUKA, Moskva 1964.

Skorowidz

allele, 267
alternatywa zdań, 10
argument liczby zespolonej, 255
argument główny, 255
asymptota
    pionowa, 210
    pozioma, 211
    ukośna, 211
    ukośna lewostronna, 210
    ukośna prawostronna, 211

bijekcja, 45

całka
    nieoznaczona, 241
    oznaczona, 245
całkowanie
    przez części, 243
    przez podstawianie, 244
cecha, 20, 54
chromosom, 267
ciąg
    arytmetyczny, 95
    Fibonacciego, 99, 111
    geometryczny, 95
    liczbowy, 95
    malejący, 102
    monotoniczny, 102
    nieskończony, 91
    niemalejący, 102
    nierosnący, 102
    ograniczony, 104
    od dołu, 104
    od góry, 104
    rosnący, 102
    wartości funkcji, 195
    zbieżny w sensie szerszym, 112
    zbieżny w sensie węższym, 105
część rzeczywista liczby zespolonej, 251
część urojona liczby zespolonej, 251

deska Galtona, 144
diagram Venna, 21
dopełnienie zbioru, 24
doświadczenie losowe, 127
    wieloetapowe, 128
    o losowej liczbie etapów, 159
dowód indukcyjny, 16
druga pochodna, 233
drzewo, 129
    stochastyczne, 157
dwumian Newtona, 146

ekstremum lokalne funkcji, 229

fizyczna interpretacja
    pochodnej funkcji w punkcie, 222
    rozkładu zmiennej losowej, 184
formuła zdaniowa, 10
funkcja
    arkus cosinus, 89
    arkus cotangens, 90
    arkus sinus, 88
    arkus tangens, 89
    n-krotnie różniczkowalna, 233
    całkowalna, 241
    charakterystyczna zbioru, 43
    ciągła na przedziale, 215
    ciągła na zbiorze, 215
    ciągła w punkcie, 212
    Dirichleta, 51, 199
    dwu zmiennych, 261
    elementarna, 65
    entier, 55, 214
    homograficzna, 83, 211
    jako przyporządkowanie, 40
    jako relacja, 39
    kwadratowa, 78
    lewostronnie ciągła w punkcie, 213
    liczbowo-liczbowa, 50
    liniowa, 65

logarytmiczna, 86
monotoniczna, 55
nieparzysta, 59
n-krotnie różniczkowalna, 233
odwrotna, 49
ograniczona, 57
ograniczona od dołu, 57
ograniczona od góry, 57
okresowa, 61
parzysta, 59
pierwotna, 241
podcałkowa, 245
potęgowa 84
prawostronnie ciągła w punkcie, 213
różniczkowalna, 224
różniczkowalna w punkcie, 221, 224
signum, 50
silnia, 51
stała, 41
trygonometryczna, 87
wklęsła, 236
wykładnicza 85
wymierna, 82
wypukła, 236
zdaniowa, 12
złożona, 49
funkcje cyklometryczne, 88
funkcje równe, 41
funktory zdaniotwórcze, 9

gameta, 267
genotyp, 267
geometryczna interpretacja
liczby zespolonej, 251
pochodnej funkcji w punkcie, 222
graf
relacji, 34
strzałkowy funkcji, 40
gra losowa
Mini Lotek, 154
sprawiedliwa, 160, 193
typu Toto Lotka, 130
granica
ciągu, 105, 112
funkcji w nieskończoności, 207
funkcji w punkcie, 197, 200
lewostronna funkcji w punkcie, 201
niewłaściwa funkcji w punkcie, 204
niewłaściwa ciągu liczbowego, 112
prawostronna funkcji w punkcie, 201

heterozygota, 267
hiperbola, 83
homozygota, 267

iloczyn
funkcji, 51
kartezjański zbiorów, 28
liczb zespolonych, 256
mnogościowy zbiorów, 24
zdarzeń, 162
zmiennych losowych, 188
iloraz
funkcji, 51
liczb zespolonych, 256
różnicowy, 221
implikacja
odwrotna, 17
prosta, 17
przeciwna, 17
przeciwstawna, 17
injekcja, 44

jednostka urojona, 251

kierunek na płaszczyźnie, 37
klasa abstrakcji, 35
klasyczna przestrzeń probabilistyczna, 151
klasyczny rozkład prawdopodobieństwa, 151
kombinacja, 140
kontrapozycja, 17
kres
dolny zbioru, 27
górny zbioru, 26
kryterium Cauchy'ego, 120
kryterium d'Alemberta, 120
kryterium porównawcze zbieżności szeregów, 119
krzywa wklęsła, 236
krzywa wypukła, 235
kształt figury, 38

kwadrat
kartezjański zbioru, 28
logiczny, 17
kwantyfikator, 13
ogólny, 13
szczegółowy, 13

liczba
zespolona, 251
zespolona sprzężona, 252
liczba e, 107
liczby Fibonacciego, 99
logarytm, 85
naturalny, 85
losowe kojarzenie osobników, 268
luka, 216

macierz, 67
główna układu równań, 73
jednostkowa, 68
kwadratowa stopnia n, 67
nieosobliwa, 68
macierzowa prezentacja układu równań, 73
maksimum
funkcji, 229
zbioru, 26
mantysa, 55
matryca logiczna, 10
metoda
eliminacji Gaussa, 74
jednakowo możliwych przypadków, 155
marynarza, 173, 187
miejsce zerowe
funkcji, 50
funkcji dwu zmiennych, 261
wielomianu, 80
minimum funkcji, 229
minimum zbioru, 26
model probabilistyczny doświadczenia losowego, 153
moduł liczby zespolonej, 254

nadzieja matematyczna, 191
nieciągłość funkcji
I rodzaju, 216
II rodzaju, 216
nieoznaczoność $\frac{0}{0}$, 228
nieoznaczoność $\frac{\infty}{\infty}$, 228
nierówność
kwadratowa, 80
wymierna, 84
niewłaściwa granica funkcji w punkcie, 204

oczekiwana wygrana, 192
odwrotność liczby zespolonej, 253
otoczenie
liczby, 105
minus nieskończoności, 111
plus nieskończoności, 110

panmiksja, 268
pasjans
Harfa Eolska, 136
Paganini, 132
Piramida, 136
Potockiego, 132
Zegar, 133
permutacja, 132
pierwiastek
równania, 66
układu równań, 73
z liczby zespolonej, 257
płaszczyzna
Gaussa, 251
kartezjańska, 28
pochodna
drugiego rzędu, 233
funkcji w punkcie, 221
funkcji złożonej, 227
jako nowa funkcja, 224
pochodne wyższych rzędów, 233
podciąg, 94
populacja, 20
mendlowska, 268
postać trygonometryczna liczby zespolonej, 256
prawa de Morgana, 11
prawdopodobieństwo, 164
klasyczne, 169
zdarzenia, 164
prawie wszystkie wyrazy ciągu, 93
prawo Hardy'ego-Weinberga, 268
prędkość chwilowa, 223

prędkość średnia, 223
produkt kartezjański zbiorów, 28
przedział liczbowy, 22
  domknięty, 22
  jednostronnie domknięty, 22
  niewłaściwy, 22
  otwarty, 22
przestrzeń
  probabilistyczna, 151, 165
  generowana przez zmienną losową, 190
  klasyczna, 151
przyrząd losujący, 127
punkt
  przegięcia, 237
  skupienia zbioru, 195

reguła
  de l'Hospitala, 228
  dowodzenia, 15
  kontrapozycji, 15
  mnożenia, 157
  odrywania, 15
  sylogizmu, 15
relacja
  antysymetryczna, 32
  dwuargumentowa, 31
  porządkująca, 32
  przechodnia, 32
  przeciwsymetryczna, 32
  przeciwzwrotna, 32
  równoważnościowa, 35
  spójna, 32
  symetryczna, 32
  w zbiorze, 31
  zwrotna, 32
rodzina
  wszystkich podzbiorów zbioru, 27
  zdarzeń pokrewnych, 160
rozkład
  Bernoulliego, 151
  cechy w populacji, 42
  dwumianowy, 151
  jednopunktowy, 189
  prawdopodobieństwa na zbiorze, 42, 151, 164
  symetryczny, 184
  zmiennej losowej, 182
rozwiązanie
  równania, 78
  równania różniczkowego, 263
  układu równań, 73
równanie
  algebraiczne, 81
  liniowe, 66
  prostej, 66
  wymierne, 84
równanie różniczkowe
  jednorodne, 264
  liniowe, 264
  liniowe jednorodne, 264
  o rozdzielonych zmiennych, 263
  w postaci jawnej, 263
  zwyczajne, 262
różnica
  funkcji, 51
  liczb zespolonych, 252
  mnogościowa zbiorów, 24
  symetryczna zbiorów, 24
ruletka, 130

sąsiedztwo
  liczby, 195
  nieskończoności, 207
silnia, 51, 95
skok, 216
suma
  funkcji, 51
  liczb zespolonych, 252
  mnogościowa zbiorów, 23, 24
  szeregu, 117
  zdarzeń, 162
  zmiennych losowych, 188
surjekcja, 45
symbole nieoznaczone, 115
symetria
  osiowa, 43
  środkowa, 42
szereg
  anharmoniczny, 118
  Dirichleta, 118
  geometryczny, 122
  harmoniczny, 118
  liczbowy, 117
  naprzemienny, 120
  bezwzględnie zbieżny, 121

rozbieżny, 117
warunkowo zbieżny, 121
zbieżny, 117

środek
ciężkości układu mas, 191
symetrii rozkładu zmiennej losowej, 184

tautologia, 11
trójkąt Pascala, 146
trójmian kwadratowy, 78
trygonometryczna postać liczby zespolonej, 256
twierdzenie
Bezouta, 80
Cantora-Bernsteina, 49
Cramera, 74
Darboux, 219
Darboux o miejscach zerowych, 219
Fermata, 230
klasyczne, 169
Lagrange'a, 231
Laplace'a, 169
Newtona-Leibniza, 244
o asymptocie ukośnej, 211
o asymptotach funkcji homograficznej, 211
o całkowaniu przez części, 243
o całkowaniu przez podstawianie, 244
o ciągłości funkcji złożonej, 218
o dwu ciągach, 113
o granicy iloczynu ciągów, 109
o granicy ilorazu ciągów, 109
o granicy różnicy ciągów, 109
o granicy sumy ciągów, 109
o pochodnej iloczynu, 226
o pochodnej ilorazu, 226
o pochodnej różnicy, 226
o pochodnej sumy, 225
o trzech ciągach, 110
Riemanna, 122
Rolle'a, 230
Weierstrassa, 218

układ
Cramera, 71, 74
równań liniowych, 70, 73
jednorodny, 73
zupełny zdarzeń, 162

wariacja, 137
bez powtórzeń, 134
wartość
bezwzględna, 23
oczekiwana zmiennej losowej, 191
średnia funkcji, 248
średnia zmiennej losowej, 191
warunek
konieczny, 9
konieczny i wystarczający, 9
wystarczający, 9
wektor
wodzący liczby zespolonej, 251
wielomian, 80
wykres
ciągu liczbowego, 101
równania, 66
funkcji, 52
wyznacznik macierzy, 69
wzory Cramera, 71
wzory Viéte'a, 79
wzór de Moivre'a, 256
wzór dwumianowy Newtona, 147

zagadnienie Cauchy'ego, 263
zasada
indukcji matematycznej, 15
praktycznej pewności, 174
zbiory
równoliczne, 47
rozłączne, 24
zbiór
co najwyżej przeliczalny, 47
ilorazowy, 35
nieprzeliczalny, 47
ograniczony, 26
ograniczony od dołu, 26
ograniczony od góry, 26
przeliczalny, 47
zdanie, 9
zdanie sprzeczne, 12
zdarzenia
przeciwne, 162

rozłączne, 162
zdarzenie, 160
elementarne, 161
losowe, 161
niemożliwe, 161
pewne, 161
praktycznie niemożliwe, 174
praktycznie pewne, 174
prawdopodobne, 161
proste, 161
zero zespolone, 251
złożenie funkcji, 49
zmienna losowa, 181, 182
zygota, 267

Prof. dr hab. Adam Płocki – profesor zwyczajny w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie, profesor PWSZ w Nowym Sączu. Doktor honoris causa Uniwersytetu Jana Evangelisty Purkyně w Usti nad Łabą (Czechy). Studia wyższe w Wyższej Szkole Pedagogicznej w Krakowie (mgr matematyki: 1965), doktorat w Uniwersytecie Jagiellońskim (dr nauk matematycznych: 1970), habilitacja w Rosyjskim Uniwersytecie Pedagogicznym w Sankt Petersburgu (1992). Tytuł naukowy profesora: marzec 2004. Autor 210 publikacji naukowych (głównie z rachunku prawdopodobieństwa i jego dydaktyki). Prace publikowane w Polsce, Rosji, Czechach, RFN, Bułgarii, Estonii, Ukrainie i na Słowacji. Wśród publikacji jest: 12 książek w j. polskim, 3 książki w j. czeskim, jedna w j. słowackim i jedna w j. rosyjskim, 3 poradniki dla nauczycieli, 5 podręczników szkolnych, 3 monografie (w tym jedna w j. rosyjskim), 4 skrypty i 3 książki dla dzieci (popularyzujące idee stochastyczne). Promotor trzech rozpraw doktorskich. Wykładał w Instytucie Pedagogicznym w Tallinnie (Estonia -1989), w Rosyjskim Uniwersytecie Pedagogicznym w Sankt Petersburgu (1991 i 1992), w Moskiewskim Uniwersytecie Pedagogicznym (MGPU – 1993 i 1995 – jako visiting professor). Od roku 2001 wykłada w Katolickim Uniwersytecie w Ružomberku (Słowacja), członek Rady Naukowej tego Uniwersytetu. Visiting professor Uniwersytetu w Usti nad Łabą (Czechy). Członek Komitetu Naukowego wielu międzynarodowych konferencji naukowych z dydaktyki matematyki organizowanych w Republice Czeskiej i na Słowacji (w tym corocznych konferencji Polish-Czech-Slovak Mathematical Conference, organizowanych od r. 1993 na przemian w Polsce, w Czechach i na Słowacji).

Od recenzenta:

„(...) Autor przedstawia bardzo nowoczesną filozofię nauczania matematyki i stara się ją realizować w książce. Stąd też duża porcja wiadomości z kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa. Przedmioty te, to jedyna okazja, oprócz arytmetyki, do poznania związków matematyki z rzeczywistością (...)"

„(...) Na uwagę zasługuje natomiast sposób przedstawiania w książce poszczególnych treści. Są one napisane językiem ścisłym, a zarazem zrozumiałym, powtarzają, uzupełniają i systematyzują, zgodnie zresztą z celami programu, wiadomości ze szkoły średniej. Na szczególne wyróżnienie zasługuje opracowanie działów związanych z funkcjami oraz rachunkiem prawdopodobieństwa (...)"

dr hab. prof. nadzw. Henryk Kąkol

ISBN: 978-83-60822-79-1